

N° D'ORDRE :

755.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. A. PARAF,

Ancien élève de l'Ecole Normale supérieure.

1^{re} THÈSE. — SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET SON EXTENSION AU CAS
DE L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 juin 1892, devant la Commission d'examen.

MM. HERMITE, *Président.*

POINCARÉ, } *Examineurs.*
PICARD, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

THÈSES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

EN CANDIDATURE AU GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. A. DUBOIS

Présentées et soutenues publiquement le 24 Mars 1892

Devant la Faculté des Sciences de Paris, composée de MM. les Docteurs en Sciences

MM. L. BOUTY, Président, J. BOUTY, Secrétaire, J. BOUTY, Secrétaire

MM. L. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY

Le 24 Mars 1892, devant la Faculté des Sciences de Paris

MM. L. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY

MM. L. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY

MM. L. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY, J. BOUTY

PARIS

IMPRIMERIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

1892

[Faint handwritten notes at the bottom of the page]

115

N° D'ORDRE :

755.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. A. PARAF,

Ancien élève de l'École Normale supérieure.

1^{re} THÈSE. — SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET SON EXTENSION AU CAS
DE L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 juin 1892, devant la Commission d'examen.

MM. HERMITE, *Président.*

POINCARÉ, } *Examineurs.*
PICARD, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, professeur....	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES. {	PASTEUR.	
	DUCHARTRE.	
	DE LACAZE-DUTHIERS..	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	O. BONNET.....	Astronomie.
	TISSERAND.....	Astronomie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
PROFESSEURS	BOUSSINESQ.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ.....	Calcul des probabilités, Phy- sique mathématique.
	Yves DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Physique céleste.
PROFESSEURS ADJOINTS..... {	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	JOLY.....	Chimie.
SECRÉTAIRE.....	PHILIPPON.	

A

M. ÉMILE PICARD,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage de profonde reconnaissance
et de respectueuse affection,

A. PARAF.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554026_0006

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LE

PROBLÈME DE DIRICHLET

ET SON EXTENSION

AU CAS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

La théorie des équations aux dérivées partielles est une de celles qui ont le plus attiré dans ce siècle l'attention des géomètres. En se bornant même à un point particulier de cette théorie, à la considération des équations linéaires du second ordre, il faut renoncer à citer tous les Mémoires écrits sur la matière, tous les résultats déjà obtenus sur ce point. La théorie générale des fonctions, la Géométrie des surfaces et des ensembles de lignes, la Physique mathématique donnent naissance à de telles équations, et la manière de poser les problèmes varie avec le point de vue auquel on se place.

Pour l'équation linéaire générale à deux variables indépendantes

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial u}{\partial x} + 2E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

le problème se présente sous deux formes bien différentes, suivant que les caractéristiques de l'équation sont réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que la quantité $B^2 - AC$ est positive ou négative. Dans ce dernier cas, on peut se proposer de trouver une intégrale continue dans une aire donnée, y admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et prenant sur le contour de l'aire des valeurs données d'avance. C'est ce problème qui fait l'objet du présent travail.

Le premier Chapitre traite de la plus simple et aussi de la plus célèbre

de toutes ces équations : je veux dire l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Le problème correspondant est connu sous le nom de *problème de Dirichlet* et joue un rôle capital dans plusieurs branches des Mathématiques. La première solution rigoureuse en a été trouvée par M. Schwarz ⁽¹⁾, et M. C. Neumann ⁽²⁾ en a, de son côté, donné une solution différente.

Plus récemment, M. Poincaré ⁽³⁾ a fait connaître une méthode nouvelle et extrêmement originale pour résoudre ce problème. L'auteur a exposé sa méthode pour le cas de trois variables, en déterminant l'équilibre électrique à la surface d'un conducteur isolé quelconque. L'application du principe des images donne alors immédiatement la fonction de Green relative à la surface inverse, et il reste, pour achever la solution, à discuter une intégrale double ⁽⁴⁾.

Outre cette voie un peu détournée, M. Poincaré montre encore, mais plus sommairement, que la même méthode se prête à la solution directe sans passer par l'intermédiaire de la fonction de Green. Il m'a semblé qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à reprendre sous cette dernière forme la belle méthode de M. Poincaré, en l'exposant dans le cas de deux variables qui, plus simple à certains égards que le cas de trois variables, présente en revanche quelques difficultés particulières tenant aux différences existant entre le potentiel newtonien et le potentiel logarithmique. Certains points étaient aussi susceptibles d'un plus grand degré de rigueur que ne leur en avait donné l'auteur dans les quelques pages concises consacrées par lui à ce sujet. J'ai ainsi été amené à apporter à la méthode de M. Poincaré des changements assez notables qui n'atteignent cependant pas le fond même des idées.

L'équation de Laplace conduit tout naturellement à l'équation

$$\Delta(u) = f(x, y).$$

⁽¹⁾ SCHWARZ, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II.

⁽²⁾ C. NEUMANN, *Untersuchungen in dem Gebiete des logarithmischen und newtonschen Potentials*, Leipzig, 1877.

⁽³⁾ POINCARÉ, *American Journal of Mathematics*, t. XII.

⁽⁴⁾ Voir, sur ce point, A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, Leipzig, 1887.

Green ⁽¹⁾ a intégré cette équation, mais la méthode qu'il a suivie laisse à désirer et n'est plus en rapport avec les habitudes d'esprit que l'on apporte aujourd'hui dans ces recherches. Cette question fait l'objet du second Chapitre.

Dans la troisième et dernière Partie, nous arrivons enfin à l'équation générale. Jusqu'à ces derniers temps, on s'était généralement borné à considérer le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques, et l'on n'avait cherché l'intégrale que sous forme de fonction analytique, sans se préoccuper des autres intégrales qui pourraient exister. M. Schwarz ⁽²⁾, dans une première tentative, avait ouvert une voie nouvelle dans un cas très particulier. C'est M. Picard qui a fait faire à la question un pas décisif en montrant que la méthode des approximations successives se prête merveilleusement à ce genre de problèmes.

Dans plusieurs Mémoires bien connus ⁽³⁾, M. Picard développe cette méthode et obtient des résultats de la plus haute importance concernant les équations du second ordre en général, ainsi que certaines équations particulières, entre autres les équations linéaires, notamment dans le cas des coefficients analytiques.

En me bornant aux équations linéaires, j'ai, en suivant une voie différente, retrouvé une partie de ses résultats et étendu au cas des coefficients quelconques quelques-uns des théorèmes démontrés par lui dans l'hypothèse des coefficients analytiques.

⁽¹⁾ GREEN, *Math. Papers* et *Journal de Crelle*, t. 47.

⁽²⁾ SCHWARZ, *Gesam. math. Abh.*, t. I, p. 241 et seq.

⁽³⁾ Voir entre autres : *Acta mathematica*, t. XII. — *Journal de Mathématiques*, 1890. — *Journal de l'École Polytechnique*, LX^e Cahier.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE LAPLACE ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET.

1. L'équation

$$(1) \quad \Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

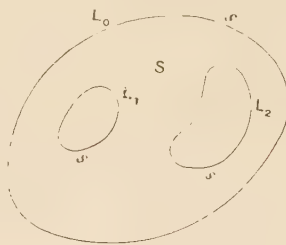
que nous appellerons *équation de Laplace*, et l'équation analogue, avec une variable indépendante de plus, interviennent dans presque toutes les branches de l'Analyse. Elles se présentent notamment dans la théorie de l'attraction, dans celle de l'équilibre électrique, dans celle de la chaleur, etc., etc. En Analyse pure, la théorie des fonctions d'une variable complexe est intimement liée à la solution du problème de Dirichlet que l'on peut énoncer comme il suit :

Trouver une fonction des deux variables x et y qui, à l'intérieur d'une aire donnée, soit finie, continue et bien déterminée, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, satisfasse à l'équation de Laplace et prenne sur le contour de l'aire des valeurs données d'avance.

C'est par ce problème que nous commencerons notre étude.

Les aires dont nous parlerons seront toujours supposées connexes, mais à connexion simple ou multiple. Si l'ordre de connexion est égal à n , l'aire sera la portion du plan limitée extérieurement par une courbe

Fig. 1.



fermée L_0 (fig. 1) et intérieurement par $n - 1$ courbes fermées $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ toutes intérieures à L_0 , mais extérieures les unes aux autres.

Nous désignerons toujours par S l'intérieur d'une telle aire, et nous emploierons la lettre s pour désigner, suivant les cas, ou bien l'ensemble du contour de S , ou bien l'une de ces courbes seulement, ou encore un point sur une de ces courbes, ainsi que la variable qui fixe la position de ce point sur le contour. Il ne pourra, d'ailleurs, jamais résulter aucune confusion de cet emploi multiple de la lettre s .

Nous supposerons d'abord que s a en chaque point une tangente bien déterminée et variant d'une manière continue. Nous verrons plus tard que l'on peut s'affranchir de cette dernière restriction, pourvu que les points où cette condition cesse d'être remplie soient en nombre limité.

Nous représenterons par U ou, d'une manière plus précise, par $U(s)$ la fonction du point s , donnée d'avance, qui exprime la suite des valeurs que doit prendre la fonction cherchée V sur le contour.

A l'égard de cette fonction U (¹), nous supposons seulement qu'elle est continue sur chacune des courbes qui limitent S , mais sans faire aucune hypothèse sur la continuité ni même sur l'existence de sa dérivée.

Nous dirons, suivant l'usage, qu'une fonction est harmonique à l'intérieur d'une aire S quand elle y est continue et uniforme, admet des dérivées des deux premiers ordres continues et uniformes, et vérifie l'équation de Laplace. Le problème de Dirichlet revient donc à trouver une fonction V harmonique dans S et prenant sur s des valeurs données d'avance. Nous voulons dire, par ces derniers mots, que, quand le point A tend vers le point s par un chemin quelconque intérieur à S , la fonction $V(A)$ tend toujours vers $U(s)$.

2. A côté du problème précédent, que nous pouvons appeler le *problème intérieur*, vient se placer un problème analogue relatif à la partie du plan extérieure à S . Les considérations qui suivent nous permettront à la fois de formuler ce problème et d'en ramener la solution à celle du problème intérieur.

A cet effet, commençons par faire une remarque qui nous sera utile dans la suite.

Si deux aires S et S' sont représentées l'une sur l'autre d'une manière

(¹) Nous ne nous occuperons pas du cas où U présenterait un nombre fini de discontinuités, ce cas pouvant se ramener simplement au cas où U est continue. Voir J. RIEMANN, *Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de l'École Normale*, 1888).

conforme par la transformation $x + iy = f(x' + iy')$, toute fonction $V(x, y)$ harmonique dans S se transforme en une fonction $V'(x', y')$ harmonique dans S' .

En effet, toute fonction harmonique $V(x, y)$ peut être considérée comme la partie réelle d'une fonction analytique d'une variable complexe $\varphi(x + iy)$, de sorte que l'on a

$$V(x, y) + iU(x, y) = \varphi(x + iy).$$

Effectuons maintenant la transformation réelle

$$x = X(x', y'), \quad y = Y(x', y')$$

avec

$$x + iy = f(x' + iy') = X(x', y') + iY(x', y'),$$

il en résultera

$$V'(x', y') + iU'(x', y') = \varphi[f(x' + iy')] = \Phi(x' + iy'),$$

où l'on a posé

$$V'(x', y') = V(X, Y),$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cela posé, effectuons une transformation par rayons vecteurs réciproques, en choisissant le pôle à l'intérieur de S . Par cette transformation les n courbes s se changent en n autres courbes s' qui sont toutes extérieures les unes aux autres, et la région S se transforme dans la région S' du plan qui est extérieure à toutes les courbes s' . La relation entre les points des deux aires est, d'ailleurs, univoque et isogonale, et la remarque précédente est donc applicable au cas présent.

La fonction $V(x, y)$ harmonique dans S et se réduisant à $U(s)$ sur s devient donc une fonction $V(x', y')$ harmonique dans S' et se réduisant à $U'(s')$ sur s' , la fonction U' étant bien connue en tout point de s' , puisque la relation entre les points des deux aires reste univoque même sur les contours. Quant au point ∞ qui est l'homologue du pôle de la transformation, on voit de suite que la fonction V' reste régulière dans le voisinage de ce point et y prend une valeur finie bien déterminée et nullement arbitraire, puisque cette valeur est précisément celle que prend V au point choisi pour pôle, laquelle est, comme nous le verrons, parfaitement déterminée par la fonction $U(s)$ donnée.

Le problème extérieur peut donc se formuler ainsi :

Étant données n courbes fermées s extérieures les unes aux autres, et une suite de valeurs formant sur chacune de ces courbes une fonction continue $U(s)$, trouver une fonction V harmonique dans la région S du plan extérieure à la fois à toutes les courbes s , prenant sur s les valeurs $U(s)$, et qui, pour x et y très grands, reste régulière en tendant vers une valeur finie inconnue, mais déterminée par la fonction $U(s)$.

Nous voyons en même temps que sa solution se ramène à celle du problème intérieur pour un contour convenable. Nous nous bornerons donc désormais à l'étude du problème intérieur.

3. Rappelons d'abord quelques résultats classiques qui sont d'un usage courant et dont la démonstration se trouve dans tous les Traités ⁽¹⁾.

Une fonction, harmonique dans une région S , ne peut avoir de maximum ni de minimum en aucun point de S .

Sa valeur en tout point intérieur est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs qu'elle prend sur le contour.

Sa valeur en tout point intérieur est donc nulle si elle est nulle tout le long du contour.

Le problème de Dirichlet ne peut admettre plus d'une solution. Il a été complètement résolu dans le cas du cercle, et l'on démontre par des considérations élémentaires que la solution est donnée, dans ce cas, par la formule

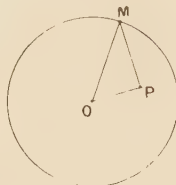
$$(2) \quad V(P) = \int V(s) \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds.$$

Dans cette formule, $V(P)$ représente la valeur que prend la fonction cherchée V (*fig. 2*) en un point quelconque P intérieur au cercle dont le centre est en O et dont le rayon est R . M est un point quelconque de la circonférence que nous désignons aussi par s , valeur de l'arc qui fixe sa position sur la circonférence; enfin l'intégrale est prise le long de la circon-

⁽¹⁾ Consulter, par exemple, NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und newtonsche Potential*, Leipzig, 1877. — A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, Leipzig, 1887. — J. RIEMANN, *Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de l'École Normale*, Paris, 1888). — E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I. Paris, 1891.

férence dans le sens positif. Cette formule montre aussi que la fonction $V(P)$ est régulière à l'intérieur du cercle.

Fig. 2.



Si, dans cette formule, nous supposons que P vienne en O , on a

$$(2\text{ bis}) \quad V(O) = \int_0^{2\pi} \frac{V(s) d\theta}{2\pi},$$

et l'on retrouve ce résultat connu, que la moyenne arithmétique des valeurs de V sur la circonférence est égale à la valeur de V au centre.

Quelques considérations empruntées à la Mécanique faciliteront encore notre tâche.

On sait que, si, dans un plan, une masse matérielle égale à m est concentrée en un point A et attire un point M de masse 1 suivant la droite MA avec une force ayant pour intensité $\frac{m}{r}$ (où r désigne la longueur absolue MA), les composantes de cette attraction suivant les axes des x et des y (que nous supposons rectangulaires) sont égales aux dérivées partielles de la fonction $m \log \frac{1}{r}$ par rapport aux coordonnées x et y du point M .

Cette fonction $m \log \frac{1}{r}$ s'appelle le *potentiel logarithmique* de la masse m sur le point M .

Si l'on a plusieurs masses attirantes, le potentiel sera la somme

$$\sum m \log \frac{1}{r}$$

étendue à toutes les masses agissantes. Si les masses remplissent d'une manière continue une aire ou un arc de courbe avec une densité ρ (ce qui veut dire que la masse contenue dans l'élément $d\tau$ de l'aire ou de la courbe est

égale à $\rho d\tau$), il existera de même un potentiel donné par la formule

$$V = \int \rho \log \frac{1}{r} d\tau$$

étendue à toutes les masses agissantes.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des masses positives.

Les principales propriétés du potentiel logarithmique que nous aurons à employer sont les suivantes.

Dans toute région qui ne contient aucune des masses agissantes, le potentiel est une fonction harmonique.

Le potentiel dû à des masses dont la distribution est superficielle est une fonction continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans toute région finie du plan.

Les dérivées du second ordre sont aussi continues tant en dehors qu'en dedans des masses agissantes, mais elles éprouvent une discontinuité en traversant le contour des aires attirantes; à l'intérieur de ces aires, on a

$$(3) \quad \Delta V = -2\pi\rho.$$

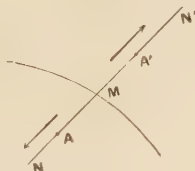
Le potentiel dû à des masses dont la distribution est linéaire est encore une fonction continue dans toute région finie, mais les dérivées du premier ordre éprouvent une discontinuité en traversant les courbes attirantes.

Cette discontinuité est exprimée par la formule

$$(4) \quad \frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -2\pi\rho,$$

dans laquelle $\frac{dV}{dn}$ est la limite vers laquelle tend la dérivée de V au point A (*fig. 3*) prise dans la direction de la flèche lorsque le point A se

Fig. 3.



rapproche de M en suivant la normale MN . $\frac{dV}{dn'}$ est la quantité analogue au point A' .

On remarquera que le potentiel logarithmique peut être aussi bien négatif que positif, et que, en un point qui s'éloigne indéfiniment, il peut être ou bien $-\infty$ ou bien 0. Ce sont ces deux faits qui donnent au cas de deux variables une physionomie particulière.

Enfin, si l'on considère le potentiel engendré par des masses distribuées d'une manière quelconque dans le plan, si l'on appelle d'une manière générale m celles de ces masses qui sont extérieures à un cercle de rayon R ou sur sa circonférence, et μ celles qui sont intérieures au cercle, la moyenne arithmétique des valeurs de ce potentiel en tous les points de la circonférence sera donnée par l'équation

$$(5) \quad \text{moy. } V = \sum m \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{R} \sum \mu,$$

r désignant la distance d'un point de masse m au centre de la circonférence.

Nous possédons maintenant tous les matériaux nécessaires. Il s'agit de les mettre en œuvre.

* 4. Soit un cercle de centre O et de rayon R , A un point extérieur, P un point intérieur.

La quantité $\log \frac{1}{AP}$, dans laquelle nous considérons le point A comme fixe et le point P comme variable, est une fonction des coordonnées de P , harmonique dans tout le cercle, puisque P est toujours séparé de A par la circonférence. En un point M de la circonférence, elle prend la valeur $\log \frac{1}{AM}$. Nous pouvons donc, en appliquant la formule (2), écrire

$$(6) \quad \log \frac{1}{AP} = \int \log \frac{1}{AM} \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds.$$

Faisons, d'autre part, $V(s) = 1$ dans la même formule (2).

L'intégrale du second membre devra représenter une fonction harmonique dans le cercle et se réduisant à l'unité sur la circonférence. Mais nous avons une telle fonction en prenant $V(P) = 1$, et comme le problème ne peut avoir plus d'une solution, on aura

$$(7) \quad 1 = \int \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds.$$

Les formules (6) et (7) expriment le fait suivant :

Si l'on a, sur la circonférence, une couche attirante dont la densité en

chaque point M est la quantité positive $\rho = \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2}$, la masse totale de cette couche sera égale à l'unité [formule (7)] et le potentiel de cette couche sur un point extérieur A sera le même que si toute la masse était concentrée en P [formule (6)].

Que devient ce potentiel quand le point A est intérieur au cercle ? Il est toujours donné par la même intégrale, mais l'égalité (6) n'a plus lieu dans ce cas. Entourons alors P d'un petit cercle et envisageons l'aire comprise entre les deux cercles pour y étudier la fonction

$$\log \frac{1}{PA} - \int \log \frac{1}{AM} \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds,$$

où, cette fois, P est fixe et A variable.

Les deux termes de la différence sont harmoniques dans l'aire, puisque chacun d'eux est un potentiel dû à des masses dont aucune n'est intérieure. Sur le cercle extérieur, la différence est nulle, comme on le voit en supposant que dans (6) le point extérieur A se rapproche de la circonférence, ce qui est légitime, à cause de la continuité du potentiel. Sur le cercle intérieur, elle est certainement positive, et comme elle ne peut avoir de minimum dans l'intérieur de l'aire, elle y sera constamment positive. On a donc, en tout point A intérieur,

$$(8) \quad \int \log \frac{1}{MA} \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds < \log \frac{1}{PA}.$$

Nous avons donc finalement démontré le théorème suivant :

Quand une masse égale à l'unité est placée en un point P de l'intérieur d'un cercle, si l'on répartit cette masse sur toute la circonférence, de manière que la densité en un point quelconque M soit inversement proportionnelle au carré de MP , la couche circulaire ainsi obtenue aura même potentiel que la masse primitive en tout point extérieur, et un potentiel plus petit en tout point intérieur.

Une telle couche s'appellera la *couche équivalente* à la masse placée en P .

Le théorème subsiste évidemment si la masse primitive, au lieu d'être égale à l'unité, était égale à m .

Enfin, si l'on avait plusieurs masses positives à l'intérieur du cercle, on

pourrait remplacer chacune d'elles par une couche équivalente, et nous arrivons ainsi à former une couche équivalente à un système quelconque de masses intérieures à un cercle, cette couche ayant même potentiel que le système donné sur tout point extérieur, et un potentiel plus petit sur tout point intérieur.

On peut remarquer qu'il est impossible de trouver sur un même cercle deux couches différentes, de densités ρ et ρ_1 , équivalentes à un même système de masses intérieures.

Soient, en effet, V et V_1 les potentiels de ces deux couches sur un même point A . On aura, pour tout point extérieur, $V = V_1$, et cette égalité aura encore lieu sur la circonférence, à cause de la continuité du potentiel. Alors la différence $V - V_1$, harmonique dans l'intérieur du cercle et nulle sur la circonférence, est nulle dans tout l'intérieur. Les fonctions V et V_1 coïncident donc dans tout le plan, et l'on a, en tout point de la circonférence,

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_1}{dn'},$$

c'est-à-dire $\rho = \rho_1$, d'après la formule (4).

C'est sur la proposition que nous venons de démontrer que repose la méthode de M. Poincaré.

5. Il nous faut encore établir deux théorèmes dus à M. Harnack, et qui jouent dans la théorie des fonctions harmoniques le même rôle que les théorèmes d'Abel sur les séries entières dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Revenons encore à la formule (2)

$$V(P) = \int V(s) \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds$$

pour en déduire des limites entre lesquelles sont comprises les valeurs de $V(P)$ à l'intérieur du cercle, si l'on suppose que $V(s)$ est constamment positif sur la circonférence. Les deux facteurs de la quantité à intégrer sont alors positifs. MP étant toujours compris entre $R + OP$ et $R - OP$, nous aurons évidemment

$$(9) \quad \frac{R - OP}{R + OP} \int \frac{V(s) ds}{2\pi R} < V(P) < \frac{R + OP}{R - OP} \int \frac{V(s) ds}{2\pi R}.$$

Cela posé, nous pouvons démontrer le premier de ces théorèmes, en l'énonçant comme il suit :

Soit une série

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

dont tous les termes sont des fonctions harmoniques positives en tous les points d'une région connexe R. Si cette série est convergente en un point de la région, elle sera uniformément convergente dans toute la région R et y représentera une fonction harmonique.

Supposons d'abord que la région R soit un cercle C de centre O et de rayon R. Construisons un cercle concentrique C' de rayon R' < R. Les fonctions u_i prendront sur C' des valeurs u'_i finies et positives, continues sur la circonférence. On aura donc, P et Q étant deux points intérieurs à C,

$$\frac{R' - OP}{R' + OP} \int_{C'} \frac{u'_i ds'}{2\pi R'} < u_i(P) < \frac{R' + OP}{R' - OP} \int_{C'} \frac{u'_i ds'}{2\pi R'},$$

$$\frac{R' - OQ}{R' + OQ} \int_{C'} \frac{u'_i ds'}{2\pi R'} < u_i(Q) < \frac{R' + OQ}{R' - OQ} \int_{C'} \frac{u'_i ds'}{2\pi R'}.$$

On en conclut, *a fortiori*,

$$u_i(P) < \frac{R' + OP}{R' - OP} \frac{R' + OQ}{R' - OQ} u_i(Q),$$

et si P ne sort pas d'un cercle de rayon R'' inférieur à R',

$$u_i(P) < \frac{R' + R''}{R' - R''} \frac{R' + OQ}{R' - OQ} u_i(Q).$$

Les quantités $u_i(P)$ sont donc respectivement inférieures aux quantités $u_i(Q)$ multipliées par un même facteur constant et indépendant de P. Donc, dans tout l'intérieur du cercle R'', la série u_i est uniformément convergente et représente, par suite, une fonction continue des coordonnées de P. R'' peut d'ailleurs être pris aussi voisin de R que nous voudrions.

Ceci s'étend sans peine à une aire connexe quelconque S. Supposons, en effet, la série convergente en un point Q de l'aire, et soit P un autre point quelconque de l'aire. Nous pourrions toujours tracer une suite de cercles en nombre fini $C_1, C_2, \dots, C_n$, se coupant successivement, et le premier contenant Q dans son intérieur, le dernier contenant P. Soit alors Q₁ un point

intérieur à la fois à C_1 et à C_2 , Q_2 un point intérieur à C_2 et à C_3 , etc. La série, étant convergente en Q , le sera dans tout le cercle C_1 et, en particulier, en Q_1 . Donc elle le sera aussi dans tout le cercle C_2 et, par suite, en Q_2 , etc.

De plus, la convergence étant uniforme dans chacune des circonférences le sera évidemment dans toute aire S' tout entière intérieure à S .

Il reste à montrer que la série, dont nous venons de prouver la convergence et la continuité, est aussi une fonction harmonique. Traçons un cercle quelconque intérieur à S ; soit O son centre et R son rayon, et appelons u la somme de la série

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

en un point quelconque P intérieur au cercle.

En un point s de la circonférence, u_n devient $u_n(s)$ et u prend une valeur $u(s)$. La série dont le terme général est $u_n(s)$ est uniformément convergente sur toute la circonférence, et l'on a

$$u(s) = u_1(s) + u_2(s) + \dots + u_n(s) + \dots$$

Nous avons donc le droit d'intégrer les deux membres de cette équation le long de la circonférence, après multiplication par le facteur $\frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds$, ce qui donnera

$$\int u(s) \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds = u_1(P) + u_2(P) + \dots + u_n(P) + \dots$$

On a donc bien

$$u(P) = \int u(s) \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R \cdot MP^2} ds,$$

ce qui démontre que la fonction u est harmonique dans le cercle et, par conséquent, dans toute l'aire.

Outre cet important théorème, M. Harnack en a encore donné un second non moins utile et dont voici l'énoncé :

Si des fonctions $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sont harmoniques à l'intérieur d'une aire S et que $u_n(A)$ tende vers $U_n(s)$ quand le point intérieur A tend vers un point s du contour par un chemin quelconque; si, de plus, la série

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$$

est uniformément convergente sur tout le contour, alors la série

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

sera uniformément convergente dans toute l'aire S et y représentera une fonction harmonique. De plus, $u(A)$ tendra vers $U(s)$ quand A tendra vers s par un chemin quelconque.

Posons

$$U = \Sigma_n + R_n = (U_1 + U_2 + \dots + U_n) + (U_{n+1} + U_{n+2} + \dots),$$

$$u = \sigma_n + r_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots),$$

$$R_{n,p} = R_n - R_{n+p} = U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+p},$$

$$r_{n,p} = r_n - r_{n+p} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}.$$

On peut prendre n assez grand pour que l'on ait

$$|R_{n,p}| < \varepsilon,$$

quels que soient s et p .

Donc $r_{n,p}$, qui est une somme d'un nombre fini de fonctions harmoniques dans S , et qui tend vers $R_{n,p}$ sur le contour, aura lui-même dans toute l'aire un module inférieur à ε .

On aura donc

$$|r_{n,p}| < \varepsilon,$$

quel que soit p et quel que soit le point A dans l'aire.

Ceci montre déjà que la série u est uniformément convergente dans S . Le même raisonnement que plus haut montrerait aussi qu'elle est harmonique.

Maintenant, s étant un point du contour, on peut de ce point comme centre tracer un cercle de rayon assez petit pour que, quel que soit le point A dans la portion de l'aire S intérieure à ce cercle, on ait

$$|\Sigma_n(s) - \sigma_n(A)| < \varepsilon,$$

puisque σ_n est une fonction continue dans S se réduisant à $\Sigma_n(s)$ au point s . Donc

$$|u(A) - U(s)| = |[\sigma_n(A) - \Sigma_n(s)] + r_n - R_n| < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

6. Nous allons faire tout de suite une application de ce second théorème, en résolvant le problème de Dirichlet dans le cas de l'aire comprise entre deux cercles concentriques.

Soient C et C' les deux cercles, R et R' leurs rayons, r et θ les coordonnées polaires d'un point de la couronne. On aura

$$R' > r > R.$$

Nous nous proposons de trouver, si cela est possible, une fonction $f(r, \theta)$, harmonique dans la couronne S , se réduisant à des fonctions données $U(\theta)$ et $U'(\theta)$ lorsque r tend vers R ou vers R' . Comme nous savons d'avance que ce problème admet au plus une solution, si nous arrivons à former une fonction répondant aux conditions énoncées, nous aurons résolu le problème.

Pour atteindre ce but, nous allons construire une série dont tous les termes soient des fonctions harmoniques dans S , et nous déterminerons les coefficients de manière à satisfaire aux conditions aux limites. Remarquons, à cet effet, que les fonctions

$$r^m \cos m\theta, \quad r^m \sin m\theta, \quad \frac{1}{r^m} \cos m\theta, \quad -\frac{1}{r^m} \sin m\theta,$$

sont harmoniques dans S , car ce sont les parties réelles et les coefficients de i dans les fonctions complexes

$$z^m \quad \text{et} \quad \frac{1}{z^m} \quad [z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)],$$

lesquelles sont holomorphes dans S , si m est entier.

Désignons donc par

$$a_0, \quad b_0, \quad a_1, \quad a_{-1}, \quad b_1, \quad b_{-1}, \quad \dots, \quad a_m, \quad a_{-m}, \quad b_m, \quad b_{-m}, \quad \dots$$

des constantes indéterminées, et employons les abréviations suivantes

$$(10) \quad \begin{cases} a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta = X_m, & a_{-m} \cos m\theta - b_{-m} \sin m\theta = Y_m, \\ \left(\frac{r}{R'}\right)^m X_m + \left(\frac{R}{r}\right)^m Y_m = u_m, \\ \left(\frac{R}{R'}\right)^m X_m + Y_m = U_m, & X_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m Y_m = U'_m; \end{cases}$$

u_m est alors une fonction harmonique dans S et tend vers U_m ou vers U'_m

quand le point mobile se rapproche d'un point de C ou de C'. Posons enfin

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} f(r, \theta) &= a_0 + b_0 \log r + u_1 + u_2 + \dots + u_m + \dots \\ &= a_0 + b_0 \log r + \left\{ \begin{aligned} &\frac{r}{R'} (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \dots + \left(\frac{r}{R'}\right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) + \dots \\ &+ \left(\frac{R}{r}\right) (a_{-1} \cos \theta - b_{-1} \sin \theta) + \dots + \left(\frac{R}{r}\right)^m (a_{-m} \cos m\theta - b_{-m} \sin m\theta) + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Admettons, pour un instant, que cette série soit uniformément convergente, écrivons que l'on a

$$f(R, \theta) = U, \quad f(R', \theta) = U',$$

et déterminons les coefficients par ces conditions à la manière de Fourier. Nous aurons les équations suivantes, où toutes les intégrales sont prises entre 0 et 2π ,

$$\begin{aligned} \int U d\psi &= 2\pi(a_0 + b_0 \log R), & \int U' d\psi &= 2\pi(a_0 + b_0 \log R'), \\ \left(\frac{R}{R'}\right)^m a_m + a_{-m} &= \frac{1}{\pi} \int U \cos m\psi d\psi, & a_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m a_{-m} &= \frac{1}{\pi} \int U' \cos m\psi d\psi, \\ \left(\frac{R}{R'}\right)^m b_m - b_{-m} &= \frac{1}{\pi} \int U \sin m\psi d\psi, & b_m - \left(\frac{R}{R'}\right)^m b_{-m} &= \frac{1}{\pi} \int U' \sin m\psi d\psi. \end{aligned}$$

(Dans ces intégrales, on a remplacé θ par ψ dans les fonctions U et U'). Ces équations déterminent sans ambiguïté tous les coefficients. On en tire

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} U_m &= \left(\frac{R}{R'}\right)^m X_m + Y_m = \frac{1}{\pi} \int U \cos m(\theta - \psi) d\psi, \\ U'_m &= X_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m Y_m = \frac{1}{\pi} \int U' \cos m(\theta - \psi) d\psi \end{aligned} \right.$$

avec

$$(13) \quad U_0 = a_0 + b_0 \log R = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{2} U d\psi, \quad U'_0 = a_0 + b_0 \log R' = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{2} U' d\psi.$$

Il faut maintenant faire voir que la série (11), dont nous venons ainsi de déterminer les coefficients, est uniformément convergente, représente une fonction harmonique, et satisfait effectivement aux conditions aux limites. Considérons, à cet effet, la somme des $n + 1$ premiers termes de la série $U_0, U_1, \dots, U_m, \dots$, qui devra représenter $f(R, \theta)$. D'après les for-

mules (12), cette somme peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U \left[\frac{1}{2} + \cos(\theta - \psi) + \cos 2(\theta - \psi) + \dots + \cos n(\theta - \psi) \right] d\psi.$$

Or, dans les applications que nous ferons de la formule cherchée, la fonction U sera toujours la succession des valeurs que prend le long du cercle C une fonction analytique régulière de x et de y . Tous les raisonnements que l'on fait sur cette intégrale dans la théorie des séries trigonométriques seront donc immédiatement applicables. Il en résulte que la série dont le terme général est U_m est uniformément convergente sur toute la circonférence C et a pour valeur U .

De même $\sum U'_m$ converge uniformément sur C' et représente U' . Donc, d'après le second théorème de Harnack, la série dont le terme général est u_m représente une fonction harmonique dans S et tend vers U ou vers U' quand le point r, θ se rapproche de C ou de C' par un chemin quelconque. La fonction $f(r, \theta)$ résout donc le problème.

On peut remarquer que, en résolvant les équations (12) par rapport à X_m et Y_m , on obtient des expressions d'où il est facile de déduire, pour le module de ces quantités, la limite supérieure que voici

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^{2m_1}} \left[\int_0^{2\pi} (\text{mod } U + \text{mod } U') \right] d\psi,$$

toutes les fois que m sera supérieur à m_1 .

On en conclut que les deux séries

$$\sum \left(\frac{r}{R'}\right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \quad \sum \left(\frac{R}{r}\right)^m (a_{-m} \cos m\theta - b_{-m} \sin m\theta)$$

sont absolument convergentes.

On peut donc changer l'ordre des termes dans $f(r, \theta)$ et l'écrire

$$f(r, \theta) = a_0 + b_0 \log r + \sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{R'}\right)^m X_m + \sum_1^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^m Y_m.$$

7. Revenons maintenant à l'aire S pour laquelle nous voulons résoudre le problème de Dirichlet.

Je dis d'abord que l'on peut toujours trouver des cercles C_i tout entiers intérieurs à S , formant une suite simplement infinie à indices entiers positifs

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots,$$

et tels, que tout point intérieur à S soit intérieur à au moins l'un des cercles C_i .

Pour le faire voir, considérons dans S une région R dont tous les points soient à une distance de s supérieure à δ . Soit δ' une longueur plus petite que δ , et traçons une série de parallèles aux axes de coordonnées ayant entre elles la distance constante $\frac{\delta'}{\sqrt{2}}$.

Nous formons ainsi une infinité de carrés, dont la diagonale est δ' . Nous ne retiendrons parmi eux que ceux qui sont en totalité ou en partie intérieurs à R , lesquels sont naturellement en nombre limité. Tout point de R est alors intérieur à l'un de ces n carrés, ou sur son contour. Ceux mêmes de ces carrés qui sont partiellement extérieurs à R sont encore sûrement intérieurs à S , puisque leur plus grande dimension δ' est inférieure à δ .

Soient $D_1, D_2, \dots, D_n$ les centres de ces carrés; de chacun de ces points comme centre, avec un rayon intermédiaire entre $\frac{\delta}{2}$ et $\frac{\delta'}{2}$, décrivons une circonférence. Chaque carré est alors tout entier intérieur au cercle correspondant, lequel est toujours intérieur à S . Chaque point de R est alors intérieur à l'un de ces n cercles.

Imaginons alors une série de longueurs $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ décroissant et tendant vers 0. Appelons R_0 la région formée par l'ensemble des points de S dont la distance à s est supérieure à δ_1 , puis, d'une manière générale, appelons R_i l'ensemble des points de S dont la distance à s est comprise entre δ_i et δ_{i+1} . (Ces régions ne seront pas nécessairement connexes, mais ceci importe peu.)

Construisons dans R_0 les cercles $C_1, C_2, \dots, C_{n_0}$ comme plus haut, puis, dans R_1 , les cercles $C_{n_0+1}, C_{n_0+2}, \dots, C_{n_1}, \dots$

Nous aurons ainsi construit les cercles demandés.

Il est clair que l'on aurait pu les construire d'une infinité de manières différentes. L'important est de voir qu'on peut leur donner pour indices la suite des nombres entiers.

8. Après avoir ainsi construit dans S la famille des cercles C_i , traçons encore une courbe fermée L qui contienne dans son intérieur la partie du plan où se trouve S . Cette courbe sera arbitraire, pourvu qu'elle soit suffisamment grande. Mettons, pour fixer les idées, que ce soit une circonférence ayant son centre dans S et un rayon supérieur au double de la plus grande dimension de S .

Appelons T la partie du plan intérieure à L .

Il pourra arriver que l'on connaisse une fonction $V_0(x, y)$ qui, à l'intérieur de T , soit holomorphe et qui, sur s , se réduise à U (U étant toujours la fonction donnée sur le contour s et qui est seulement supposée être continue). Nous allons résoudre le problème dans ce cas particulier, auquel nous ramènerons ensuite le cas général.

Supposons d'abord que ΔV_0 soit constamment négatif dans T . Si alors on pose

$$-\frac{\Delta V_0}{2\pi} = \rho,$$

ρ sera une fonction holomorphe et positive dans T .

Imaginons une masse répandue d'une manière continue sur T et dont la densité en chaque point serait justement la fonction ρ . Cette masse aura un potentiel W_0 , et l'on aura, dans toute la région T ,

$$\Delta W_0 = -2\pi\rho = \Delta V_0, \quad \Delta(W_0 - V_0) = 0.$$

La différence $W_0 - V_0 = \theta$ est donc une fonction harmonique dans T , et nous est parfaitement connue, puisque nous connaissons W_0 et V_0 pour tous les points de T . En particulier, nous connaissons les valeurs $\theta(s)$ que prend θ sur le contour s qui est tout entier intérieur à T , et nous avons

$$(14) \quad \theta(s) = W_0(s) - U.$$

Les masses qui engendrent le potentiel W_0 sont toutes positives, et une partie d'entre elles est intérieure à S . Envisageons en particulier celles qui sont intérieures au cercle C_i .

Nous avons appris au n° 4 à former une couche équivalente à ces masses. Comme nous aurons à répéter souvent cette opération, il est bon de lui donner un nom spécial. Nous l'appellerons, avec M. Poincaré, le *balayage* du cercle C_i .

Nous pourrions dire alors que le balayage du cercle C_i ne change pas le potentiel en un point quelconque extérieur à C_i , mais le diminue en tout point intérieur. Cette opération n'altère pas non plus la somme totale des masses et n'introduit jamais de masses négatives.

Balayons alors successivement tous les cercles dans un ordre tel que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois. Il suffira, pour cela, de les balayer dans l'ordre

$$1\ 2, \quad 1\ 2\ 3, \quad 1\ 2\ 3\ 4, \quad \dots,$$

en ne tenant cependant aucun compte de ceux qui pourraient ne contenir aucune masse quand viendrait leur tour d'être balayés. Ainsi, par exemple, si, après la septième opération, le cercle C_3 ne contenait aucune masse, on prendrait à sa place le cercle C_4 .

Appelons enfin W_k ce que devient le potentiel après la $k^{\text{ième}}$ opération et comparons entre elles les valeurs des différentes quantités W_k en un même point A.

Il est clair que, si A est extérieur au cercle balayé à la $k^{\text{ième}}$ opération, on aura

$$W_k = W_{k-1}.$$

Dans le cas contraire, on aura

$$W_k < W_{k-1}.$$

Donc, dans tous les cas,

$$W_k \leq W_{k-1}.$$

W_k va donc en décroissant ou tout au moins ne va jamais en croissant quand l'indice augmente. Remarquons que, si A est extérieur à S, il est aussi extérieur à tous les cercles. A l'extérieur de S, on a donc

$$W_k = W_0.$$

Nous allons voir maintenant que, lorsque k augmente indéfiniment, W_k tend vers une limite W , déterminée en chaque point de T, et tendant vers $U(s) + \theta(s)$ quand A tend vers le point s du contour.

Pour le démontrer, construisons un cercle tangent en s au contour et tout entier extérieur à S. Construisons aussi un second cercle concentrique au premier; contenu tout entier dans T et comprenant S dans son intérieur,

ce qui est possible si T a les dimensions que nous avons indiquées et si le rayon du premier cercle est assez petit.

Comme nous savons résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire comprise entre deux cercles concentriques, nous pouvons construire une fonction ω , harmonique entre les deux cercles, et prenant sur ces cercles les mêmes valeurs que W_0 . Étudions la différence $F = W_n - \omega$. Elle est nulle sur les deux cercles qui sont tous deux extérieurs à S , et où, par suite, on a $W_n = W_0$. Nous allons montrer qu'elle est positive dans toute la couronne. Il suffit, pour cela, de faire voir qu'elle n'y peut admettre de minimum.

Or, si F pouvait avoir un minimum en un point B de cette couronne et que l'on traçât autour de B comme centre un cercle assez petit, la valeur de F en tout point de ce cercle, et, par suite, sa valeur moyenne sur le cercle, serait plus grande que sa valeur en B . Calculons cette moyenne. On a

$$\mathfrak{M} F = \mathfrak{M} W_n - \mathfrak{M} \omega.$$

Mais W_n est un potentiel, ω est une fonction harmonique.

Donc, d'après les formules (5) et (2 bis),

$$\mathfrak{M} F = \sum m \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{R} \sum \mu - \omega(B).$$

D'ailleurs, au point B , on a

$$F(B) = \sum m \log \frac{1}{r} + \sum \mu \log \frac{1}{r} - \omega(B).$$

Donc

$$\mathfrak{M} F - F(B) = \log \frac{1}{R} \sum \mu - \sum \mu \log \frac{1}{r}.$$

(Je rappelle que, dans ces formules, m désigne les masses extérieures au cercle, μ les masses intérieures, r la distance d'un point au centre, R le rayon.)

Cette différence est évidemment négative, puisque, pour tout point intérieur,

$$1 < \frac{1}{R} < \frac{1}{r},$$

et cette conclusion est contradictoire avec l'hypothèse d'un minimum.

On a donc, pour tout point de S , et quel que soit n ,

$$W_n > \omega.$$

Donc W_n tend vers une limite W qui est supérieure ou égale à ω , et l'on a

$$W_n > W \geq \omega.$$

Imaginons maintenant que le point mobile A tende vers s .

W_n et ω tendent tous deux vers la valeur de W_0 au point s , W tend donc aussi vers cette valeur qui est $U(s) + \theta(s)$.

Nous constatons donc l'existence d'une fonction W , définie dans l'intérieur de S et tendant vers $U + \theta(s)$ quand A se rapproche du contour. Nous allons voir aussi qu'elle est harmonique dans S .

Envisageons un des cercles, C_α par exemple, et supposons que ce cercle soit balayé aux opérations $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Après chacune de ces opérations, le cercle C_α ne contient plus aucune masse. On a donc, à l'intérieur de ce cercle,

$$\Delta W_{\alpha_i} = 0.$$

Or les quantités

$$W_{\alpha_1}, \quad W_{\alpha_2}, \quad \dots, \quad W_{\alpha_n}, \quad \dots$$

sont des fonctions harmoniques, décroissantes, et ont pour limite W .

La série

$$W_{\alpha_1} + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_1}) + (W_{\alpha_3} - W_{\alpha_2}) + \dots + (W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n-1}}) + \dots$$

a donc tous ses termes de même signe, sauf peut-être le premier. Ils sont harmoniques dans C_α ; la somme des n premiers termes est W_{α_n} qui tend vers W . La série est donc convergente et définit une fonction W harmonique dans C_α d'après le premier théorème de Harnack.

On a donc $\Delta W = 0$ dans toute l'étendue de S , puisque tout point de S est intérieur à un cercle C_α .

La fonction $W - \theta$ est harmonique dans toute l'étendue de S et tend vers U sur le contour s . C'est donc la solution du problème de Dirichlet.

On a supposé dans cette démonstration que ΔV_0 conservait dans T un signe constant. Si cela n'était pas, on pourrait toujours partager T en deux régions T_1 et T_2 , la première contenant tous les points pour lesquels $-\frac{\Delta V_0}{2\pi}$ est positif, la seconde, tous ceux pour lesquels la même quantité est

négative. Définissons alors des fonctions ρ_1 et ρ_2 par les conditions suivantes

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho & \text{dans } T_1, \\ 0 & \text{dans } T_2; \end{cases} \quad \rho_2 = \begin{cases} 0 & \text{dans } T_1, \\ -\rho & \text{dans } T_2. \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont, dans toute l'étendue de T , continues et positives ou nulles. Et, de plus, on a

$$\rho = \rho_1 - \rho_2.$$

Considérons alors deux systèmes de masses ayant des densités ρ_1 et ρ_2 . Elles engendreront deux potentiels W_0^1 et W_0^2 qui, dans toute l'étendue de T , donneront lieu aux relations

$$\frac{\Delta W_0^1}{-2\pi} = \rho_1, \quad \frac{\Delta W_0^2}{-2\pi} = \rho_2, \quad \frac{\Delta (W_0^1 - W_0^2)}{-2\pi} = \rho_1 - \rho_2 = \rho,$$

$$\Delta (W_0^1 - W_0^2 - V_0) = 0.$$

On a donc

$$W_0^1 - W_0^2 - V_0 = \theta,$$

θ étant encore harmonique dans T et bien connue.

Alors les raisonnements précédents s'appliquent mot pour mot aux deux fonctions W_0^1 et W_0^2 traitées isolément. Elles engendrent respectivement deux fonctions W^1 et W^2 harmoniques dans S et prenant sur le contour les mêmes valeurs que W_0^1 et W_0^2 . La fonction $W^1 - W^2 - \theta$ résout donc le problème.

Nous avons supposé implicitement chacune des régions T_1 et T_2 connexe. Dans le cas contraire, on les décomposerait en plusieurs régions connexes, et l'on considérerait séparément les fonctions ρ relatives à chacune de ces régions; les mêmes raisonnements seraient, d'ailleurs, applicables.

9. Nous venons de résoudre le problème dans un cas particulier. Il est aisé d'y ramener le cas général. Voici la marche que nous allons suivre.

On peut toujours bien facilement, et cela d'une infinité de manières, construire une fonction $\psi(x, y)$, continue dans la région T et prenant sur s les valeurs données U . Nous ne faisons ici sur ψ aucune autre hypothèse que celle de la continuité.

Nous montrerons alors que l'on peut trouver une infinité de polynômes

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

croissants et tendant uniformément vers ψ dans toute la région T. Appelons

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

les valeurs de ces polynômes sur s . Ces fonctions U_n sont croissantes et tendent uniformément vers U .

Nous savons alors résoudre le problème de Dirichlet pour chacune des valeurs

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

de la fonction donnée sur le contour, et nous trouvons une suite

$$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$$

de fonctions harmoniques dans S. Nous montrerons que ces fonctions V_n tendent vers une limite V qui est la fonction cherchée.

Rappelons à cet effet que, d'après un théorème de M. Picard ⁽¹⁾, on peut toujours trouver un polynôme $F(x, y)$ qui représente, avec une erreur moindre qu'un nombre ε donné d'avance, une fonction $\psi(x, y)$ arbitrairement définie dans une aire T et assujettie à la seule condition d'être continue.

Soit alors $\psi(x, y)$ une fonction continue définie dans l'aire T et se réduisant à U sur les lignes s . Appelons M et m ses limites supérieure et inférieure dans T. Nous pouvons toujours supposer ψ positive; dans le cas contraire, il suffirait de raisonner sur la fonction $\psi + C$, C désignant une constante convenable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ une suite infinie de nombres positifs, croissants et tendant vers l'unité, et posons

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \delta_i$$

en supposant encore $\delta_i > \delta_{i+1}$.

Toutes ces conditions seront réalisées en prenant, par exemple,

$$\lambda_i = 1 - \frac{1}{2^i}.$$

Considérons enfin la suite de fonctions continues, positives, croissantes,

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. CXII, et *Traité d'Analyse*, t. I, p. 262.

et tendant vers ψ

$$\lambda_1\psi, \lambda_2\psi, \dots, \lambda_n\psi, \dots$$

et construisons le polynôme $F_i(x, y)$ qui représente $\lambda_i\psi$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}\delta_i m$.

Ces polynômes F_i forment une suite croissante, car on a

$$\begin{aligned} F_{i+1} &> \lambda_{i+1}\psi - \frac{1}{2}\delta_{i+1}m, \quad F_i < \lambda_i\psi + \frac{1}{2}\delta_i m, \\ F_{i+1} - F_i &> \lambda_{i+1}\psi - \lambda_i\psi - \frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1})m > \delta_i m - \frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1})m > 0. \end{aligned}$$

Les F_i forment donc une suite croissante qui tend uniformément vers ψ . Si donc on appelle U_i la valeur de F_i sur s , les U_i forment aussi une suite croissante tendant uniformément vers U .

Maintenant, nous savons, au moyen de chaque fonction F_i , construire une fonction V_i harmonique dans S et se réduisant à U_i sur s .

Ces fonctions V_i forment aussi une suite croissante, puisque la différence $V_{i+1} - V_i$, qui est harmonique dans S , prend sur s les valeurs positives $U_{i+1} - U_i$.

D'ailleurs V_i est toujours inférieur à M , puisqu'il en est de même de U_i .

Les fonctions V_i ont donc une limite V . Je dis que V est la fonction cherchée.

Considérons, en effet, la série convergente

$$V = V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots + (V_n - V_{n-1}) + \dots$$

Chaque terme de la série est harmonique dans S , et le terme général $V_n - V_{n-1}$ tend vers $U_n - U_{n-1}$ quand le point mobile se rapproche du contour.

D'ailleurs la série de ces valeurs au contour

$$U_1 + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \dots + (U_n - U_{n-1}) + \dots$$

converge uniformément vers U sur tout le contour.

Donc, d'après le second théorème de Harnack, la fonction V est harmonique dans S et tend vers U sur s .

C. Q. F. D.

10. Jusqu'à présent, nous avons supposé que le contour s avait en chaque point une tangente bien déterminée et dont la direction variait d'une manière continue. Nous allons voir que la même méthode donne encore la solution du problème dans le cas où, en un nombre limité de points, la direction de la tangente varie brusquement d'un angle fini.

Soit M un point de s où il existe deux tangentes. Nous appellerons *angle de ces tangentes* et nous désignerons par $\alpha\pi$ l'angle dont il faut faire tourner la tangente à l'un des arcs issus de M pour l'amener à coïncider avec la tangente au second arc *en balayant l'intérieur de S* . Cet angle est toujours compris entre 0 et 2π et peut d'ailleurs atteindre ces limites.

Ainsi, par exemple, cet angle est inférieur à π dans les *fig.* 4 et 5 et supérieur à π dans les *fig.* 6 et 7.

Fig. 4.

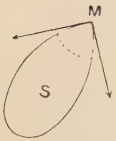


Fig. 5.

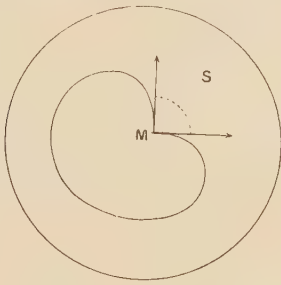


Fig. 6.

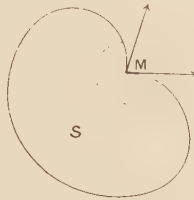
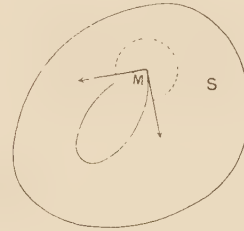


Fig. 7.



A quel moment la méthode pourrait-elle cesser d'être applicable? Nous pourrions toujours encore construire les cercles C_i , définir un potentiel W_0 , balayer les cercles C_i . En tout point non singulier de s , nous pouvons encore construire un cercle tangent extérieurement, et, par suite, nous savons encore que la méthode conduit dans tous les cas à une fonction V harmonique dans S et tendant vers U quand le point mobile x, y se rapproche d'un point quelconque *non singulier* de s . La seule question qui reste douteuse est donc de savoir si cette dernière propriété subsiste encore en un point tel que M .

Or la chose est d'abord évidente pour un point anguleux pour lequel on a

$$0 \leq \alpha \leq 1;$$

car on peut toujours, en un tel point, construire un cercle passant par M et tout entier extérieur à S . Le raisonnement général reste donc applicable.

Mais nous ne pourrions plus construire ce cercle en un point M pour lequel on aurait

$$1 < \alpha \leq 2.$$

On ramènerait facilement ce cas au cas précédent, au moins tant que l'on ne rencontrerait pas en un sommet deux arcs présentant un contact d'ordre

supérieur au premier, en combinant convenablement un nombre fini d'inversions et de transformations conformes du type

$$Z = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais le procédé suivant semble plus élégant et, en outre, aura l'avantage de s'appliquer quel que soit l'ordre des contacts.

Soient u et v deux variables complexes dans des plans différents, et considérons les deux relations concordantes

$$u = v + \sqrt{v^2 - c^2}, \quad v = \frac{u^2 + c^2}{2u}.$$

Soient F et F' les points $v = +c$, $v = -c$.

Il est facile de voir que, par cette transformation, l'aire comprise dans le plan des u entre deux cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons des longueurs R et R' supérieures à c sera représentée d'une manière conforme sur l'aire comprise, dans le plan des v , entre deux ellipses de foyers F et F' . Si le plus petit rayon R' tend vers c , l'ellipse intérieure s'aplatira indéfiniment et aura pour limite le segment FF' . En d'autres termes, étant donnée l'aire doublement connexe comprise entre une ellipse et le segment FF' considéré comme une ellipse infiniment aplatie, nous savons en faire la représentation conforme sur une couronne circulaire convenablement choisie, et, par suite, nous savons résoudre le problème de Dirichlet pour cette aire elliptique.

Revenons alors à la méthode de M. Poincaré. Nous avons vu que, dans tous les cas, elle conduit à une fonction V harmonique dans l'aire et tendant vers U toutes les fois que le point mobile tend vers un point du contour qui n'est pas un point singulier d'angle supérieur à π . Il nous restait à examiner ce qui se passe en ces derniers points.

Si l'on a $\alpha < 2$, ou si, α étant égal à 2, les deux branches de courbe sont de part et d'autre de la tangente, on pourra toujours, à partir du point M , tracer un petit segment rectiligne MM' tout entier extérieur à l'aire. De M et M' comme foyers décrivons une ellipse intérieure à T mais comprenant S tout entière à son intérieur. Nous avons ainsi formé une aire elliptique doublement connexe qui peut remplacer la couronne circulaire dont nous nous sommes servi jusqu'à présent. La suite des raisonnements n'est pas changée, et la proposition que nous avons en vue est démontrée.

Si, au contraire, les deux branches de courbe sont d'un même côté de la tangente, il faudra modifier légèrement la méthode. Quel que soit l'ordre de leur contact, on pourra toujours tracer un arc de courbe analytique MM' circulant entre les deux branches de courbe et tout entier extérieur à l'aire. La portion du plan voisine de cet arc ⁽¹⁾ pourra être représentée sur le plan de manière que l'arc MM' se transforme en un segment rectiligne FF' . De F et F' comme foyers, traçons alors une petite ellipse située tout entière dans la portion du plan où la transformation est valable. A cette ellipse correspond dans l'ancien plan une petite courbe fermée σ qui est en partie intérieure et en partie extérieure à S . Nous avons ainsi défini une petite aire Σ doublement connexe, limitée par la courbe σ et la coupure curviligne MM' , pour laquelle nous savons résoudre le problème de Dirichlet, puisque Σ est représentable sur une couronne circulaire.

Cela posé, rappelons-nous que l'existence de la fonction W est démontrée pour l'aire T tout entière. A l'extérieur de S elle est égale à W_0 . A l'intérieur de S , elle est harmonique et tend vers W_0 quand le point mobile se rapproche d'un point non singulier du contour. Formons alors une fonction ω , harmonique dans Σ , prenant sur σ les mêmes valeurs que W , et sur MM' les mêmes valeurs que W_0 , et considérons, comme au n° 8, la différence

$$F = W_n - \omega.$$

On démontrera, comme à cet endroit, que F ne peut avoir de minimum en aucun point de Σ . D'ailleurs F est positive ou nulle sur tout le contour de Σ . On a donc, dans σ ,

$$W_n > \omega,$$

quel que soit n , et, par suite,

$$W_n > W > \omega.$$

On voit alors, comme au n° 8, que W tend vers W_0 , même au point M .

La méthode réussit donc pleinement, quelle que soit la nature des pointes que peut présenter le contour.

(1) Voir, par exemple, J. RIEMANN, *loc. cit.*, Chap. III.



CHAPITRE II.

L'ÉQUATION $\Delta u = f(x, y)$.

.....

1. L'équation $\Delta u = f(x, y)$ se présente naturellement après celle que nous venons d'étudier. Elle en est même inséparable, car son intégration se ramène, comme nous allons voir, au problème de Dirichlet. Nous nous proposons de montrer que l'on peut trouver une fonction u , finie et continue dans une aire donnée S ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, vérifiant l'équation proposée, et prenant sur le contour s de S des valeurs données d'avance. La fonction $f(x, y)$ qui figure dans le second membre sera supposée continue dans S , et, de plus, nous supposerons qu'elle admet dans cette région des dérivées partielles du premier ordre continues.

Il est d'abord évident qu'il ne peut exister deux fonctions u et u' satisfaisant aux conditions énoncées, car leur différence $u - u'$ satisferait évidemment à l'équation de Laplace et s'annulerait sur s .

Elle serait donc identiquement nulle.

La solution est donc unique, si toutefois elle existe.

Soient encore u et v deux fonctions vérifiant l'équation. On aura de nouveau

$$u - v = \theta,$$

θ étant harmonique dans S . Si v s'annule sur le contour s , θ prendra sur s la même succession de valeurs que u . Notre problème sera donc complètement résolu si nous trouvons une intégrale v de l'équation s'annulant sur le contour, car, pour achever la solution, il suffira de résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire S et la succession donnée U de valeurs sur le contour. Soit θ la fonction harmonique ainsi déterminée, alors

$$u = v + \theta$$

sera la solution du problème proposé.

Il nous reste donc seulement à trouver la fonction v .

2. Nous y arriverons aisément par l'emploi de la fonction connue sous le nom de *fonction de Green*, et dont voici la définition. Elle est harmonique dans S , excepté en un seul point P où elle devient infinie comme $\log \frac{1}{r}$, r désignant la distance du point mobile xy au point P . De plus, elle s'annule sur le contour.

Il existe évidemment une fonction, et une seule, répondant à ces conditions.

Formons, en effet, une fonction ω harmonique dans S et prenant sur s les mêmes valeurs que $\log \frac{1}{r}$. Alors la différence

$$(1) \quad G(x, y; a, b) = \log \frac{1}{r} - \omega$$

sera la fonction cherchée (nous désignons par a, b les coordonnées du point P). Il ne peut en exister une seconde, car on voit sans peine que la différence de deux fonctions G serait identiquement nulle.

Pour abrégé, nous appellerons P le pôle de la fonction de Green, comme le font plusieurs auteurs, bien que ce mot soit employé avec une autre acception dans la théorie des fonctions d'une variable ⁽¹⁾.

La fonction de Green jouit de l'importante propriété exprimée par l'égalité suivante

$$(2) \quad G(a, b; a_1, b_1) = G(a_1, b_1; a, b).$$

On le démontre en entourant chacun des deux points ab, a_1b_1 d'un petit cercle, et appliquant à l'aire Σ , qui résulte de S par la suppression des aires de ces deux petits cercles, la formule de Green

$$\iint_{\Sigma} [U \Delta V - V \Delta U] d\Sigma + \int_{\sigma} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

dans laquelle on fera

$$U = G(x, y; a, b), \quad V = G(x, y; a_1, b_1).$$

Rappelons que, dans l'application de cette formule, les dérivées $\frac{d}{dn}$ sont

(1) Cf. HARNACK, *loc. cit.*

prises dans la direction de la normale intérieure à l'aire Σ , et que chaque courbe du contour est parcourue dans le sens direct relatif à cette courbe prise isolément. Je n'insiste pas sur cette démonstration qui est classique ⁽¹⁾.

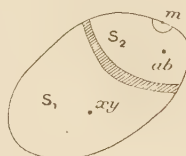
Il en résulte que si, laissant fixe le point xy , nous considérons le pôle ab comme variable, les fonctions $G(a, b)$ et $\omega(a, b)$ seront harmoniques, la première dans S sauf au point xy , la seconde dans toute l'étendue de S .

Par suite aussi, xy restant fixe, $G(a, b)$ tendra vers 0 quand ab tendra vers un point du contour.

Nous allons présenter ces conséquences sous une forme un peu différente qui nous sera utile plus loin.

Détachons de S (*fig. 8*) une bande mince, mais d'épaisseur finie, qui

Fig. 8.



décompose S en deux parties séparées S_1 et S_2 , et supposons que xy soit mobile dans S_1 et ab dans S_2 .

$G(x, y; a, b)$ deviendra alors une fonction continue des quatre paramètres x, y, a, b et, d'après un théorème général, cette fonction sera *uniformément* continue dans les conditions où nous sommes placé. Autrement dit, à tout nombre ε on pourra faire correspondre un nombre ρ tel, que si l'on considère deux cercles de rayon ρ n'empiétant pas sur la bande mince et ayant pour centres l'un un point quelconque de S_1 , l'autre un point quelconque de S_2 , la variation de G sera inférieure à ε tant que xy ne sortira pas du premier cercle et ab du second.

Si donc nous prenons un point m sur la partie de s qui appartient à S_2 , comme centre d'un arc de cercle de rayon ρ , et si ab ne sort pas de ce petit cercle, on aura

$$G(x, y; a, b) < \varepsilon,$$

⁽¹⁾ Voir, par exemple, RIEMANN : *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*.

quel que soit x, y dans S_1 , puisque l'on a rigoureusement $G(x, y; a, b) = 0$, quel que soit x, y dans S_1 quand a, b est au point m lui-même.

Dans la dernière inégalité, nous avons écrit G et non pas $|G|$, parce que la fonction de Green est toujours positive.

3. Proposons-nous maintenant de trouver l'intégrale continue v qui s'annule sur le contour de S .

Soit a, b un point quelconque intérieur à S . Entourons ce point d'un petit cercle c et considérons l'aire S' limitée par s et c . Soit $G(x, y; a, b)$ la fonction de Green relative au point a, b .

Les deux fonctions v et G sont, par hypothèse, finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres dans l'aire S' . On peut donc leur appliquer la formule de Green relativement à cette aire

$$\int \int_{S'} (v \Delta G - G \Delta v) dx dy + \int_s \left(v \frac{dG}{dn} - G \frac{dv}{dn} \right) ds + \int_c \left(v \frac{dG}{dn} - G \frac{dv}{dn} \right) dc = 0.$$

Or ΔG est nul dans S' , quelque petit que soit c . La première intégrale se réduit donc à $-\int \int_{S'} G \Delta v dx dy$. Mais on a $\Delta v = f(x, y)$, et l'intégrale $\int \int_c f(x, y) G dx dy$ tend vers 0 quand c tend lui-même vers 0, comme on le voit en employant des coordonnées polaires et remarquant que le produit rG tend vers 0 avec r . La première intégrale tend donc vers une limite finie et déterminée

$$-\int \int_s f(x, y) G(x, y, a, b) dx dy$$

quand le cercle c tend vers 0.

La seconde intégrale, relative au contour s , est nulle, puisque v et G sont nuls sur s ⁽¹⁾.

La troisième intégrale peut s'écrire de la façon suivante :

$$\int_c v \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dc - \int_c \left(v \frac{d\omega}{dn} + G \frac{dv}{dn} \right) dc,$$

(1) Ceci suppose, à la vérité, que $\frac{dv}{dn}$ reste finie en tous les points du contour; mais nous verrons que tel est le cas.

en tenant compte de la définition de G . D'ailleurs,

$$\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{r}.$$

On a donc

$$\int_c \varphi \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dc = - \int_0^{2\pi} \varphi d\theta,$$

et cette intégrale a pour limite $-2\pi \varphi(a, b)$.

L'intégrale $\int_c \left(\varphi \frac{d\omega}{dn} + G \frac{d\varphi}{dn} \right) dc$ tend évidemment vers 0.

On a donc finalement

$$(3) \quad \varphi(a, b) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_S f(x, y) G(x, y; a, b) dx dy,$$

et nous avons ainsi la valeur de la fonction cherchée au point a, b .

Mais nous l'avons obtenue en supposant qu'il existe effectivement une fonction φ , ce qui n'est nullement évident. Il faut donc démontrer inversement que la fonction φ , définie par l'équation précédente (3), satisfait aux conditions suivantes :

Elle est continue dans S ;

Elle y admet des dérivées du premier ordre continues;

Elle y admet des dérivées du second ordre continues;

Elle vérifie l'équation $\Delta \varphi = f(x, y)$;

Elle s'annule sur le contour.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

4. Le premier point demande à peine une démonstration. Traçons autour de a, b un petit cercle c . Soient S_1 la partie de l'aire extérieure à ce cercle, S_2 l'intérieur de ce cercle.

L'intégrale relative à S_1 est évidemment continue tant que a, b reste dans le cercle. L'intégrale S_2 peut être rendue aussi petite que l'on veut, puisqu'elle tend vers 0 avec le rayon du cercle. L'intégrale totale est donc une fonction continue de a, b .

Le second point est un peu plus délicat. Bien que l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi} \int \int_S f(x, y) \frac{\partial G(x, y, a, b)}{\partial a} dx dy$$

ait une valeur finie et déterminée, comme on le voit en employant des coordonnées polaires, il n'est pas certain qu'elle représente $\frac{\partial v}{\partial a}$, car nous ne sommes pas dans les conditions où l'on peut, sans crainte, différentier sous le signe sommatoire.

Il est donc nécessaire de montrer que l'on a bien

$$\begin{aligned} \lim_{\delta a \rightarrow 0} \iint f(x, y) \frac{G(x, y, a + \delta a, b) - G(x, y, a, b)}{\delta a} dx dy \\ = \iint f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} G(x, y, a, b) dx dy. \end{aligned}$$

Décrivons un petit cercle c ⁽¹⁾ contenant, dans son intérieur, les deux points a, b et $a + \delta a, b$. Soit S_1 la partie de S extérieure à ce cercle.

L'égalité précédente est vraie certainement pour l'aire S_1 , car la fonction G et sa dérivée sont continues dans S_1 .

D'ailleurs, l'intégrale $\iint_{S_1} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} G(x, y, a, b) dx dy$ tend vers une limite quand le rayon du cercle c tend vers 0, car l'intégrale

$$\iint_c f(x, y) \frac{\partial G}{\partial a} dx dy$$

tend vers 0 avec c . Elle peut s'écrire, en effet,

$$\iint_c f(x, y) \frac{x - a}{r^2} dx dy - \iint_c f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy,$$

et la chose devient alors évidente si l'on emploie des coordonnées polaires.

Il reste donc seulement à montrer que l'intégrale

$$\iint_c f(x, y) \frac{G(a + \delta a, b) - G(a, b)}{\delta a} dx dy$$

tend vers zéro avec le rayon du cercle c , et il suffira de démontrer ceci en remplaçant G par $\log \frac{1}{r}$.

Appelons r et r' les distances de x, y à a, b et à $a + \delta a, b$.

(1) Cf. BOUQUET, cité par M. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I.

Dans le triangle ayant pour sommets ces trois points, on a toujours

$$|r - r'| < |\partial a|.$$

Élevons sur le milieu de a, b ; $a + \delta a$, b une perpendiculaire qui divise c en deux parties T_1 et T_2 .

Dans T_1 , on a $r < r'$; dans T_2 , on a $r > r'$.

Considérons d'abord l'intégrale étendue à T_1

$$\int \int_{T_1} f(x, y) \frac{\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}}{\partial a} dx dy.$$

On a, dans T_1 ,

$$\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r} = \log \frac{r}{r'} = \log \left(1 - \frac{r' - r}{r'} \right) = - \left[\frac{r' - r}{r'} + \frac{1}{2} \left(\frac{r' - r}{r'} \right)^2 + \dots \right],$$

développement possible, puisque r est plus petit que r' .

Or la série entre crochets est inférieure à la progression géométrique dont la raison est $\frac{r' - r}{r'}$ et qui a pour somme

$$-\frac{r' - r}{r'} : \left(1 - \frac{r' - r}{r'} \right) = -\frac{r' - r}{r}.$$

On a donc

$$\left| \frac{1}{\partial a} \left(\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r} \right) \right| < \frac{r' - r}{r} \cdot \frac{1}{|\partial a|} < \frac{1}{r}.$$

L'intégrale $\int \int_{T_1} f(x, y) \frac{\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}}{\partial a} dx dy$ a donc un module plus petit que $\int \int_{T_1} f(x, y) dr d\theta$, c'est-à-dire plus petit que $2\pi MD$, en appelant M le maximum du module de $f(x, y)$ dans c et D le diamètre de c .

On répéterait la même démonstration pour l'aire T_2 .

Il résulte de là que l'intégrale relative au cercle c peut être rendue aussi petite que l'on veut. On a donc bien

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = - \frac{1}{2\pi} \int \int_s f(x, y) \frac{\partial G}{\partial a} dx dy,$$

et cette dérivée est une fonction continue, puisque nous avons vu que l'in-

tégrale du second membre, étendue seulement au cercle c , peut être rendue aussi petite que l'on veut.

5. Si maintenant nous passons aux dérivées secondes, le même raisonnement ne sera plus applicable, car l'intégrale

$$\int \int_S f(x, y) \frac{\partial^2 G}{\partial a^2} dx dy$$

n'a plus de sens. Un artifice est nécessaire; nous l'empruntons à Riemann ⁽¹⁾. Partons de l'expression obtenue

$$-2\pi \frac{\partial v}{\partial a} = \int \int f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy - \int \int f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy.$$

La seconde intégrale admet des dérivées de tous les ordres.

Pour transformer la première, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} = - \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r}.$$

Cette substitution permettra d'intégrer par parties. Mais, pour plus de rigueur, commençons par séparer de S un petit cercle c comprenant le point A , et soit S' l'aire ainsi obtenue. On a alors

$$\begin{aligned} \int \int_{S'} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy &= - \int \int_{S'} f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy \\ &= - \int_{s+c} f(x, y) \log \frac{1}{r} dy + \int \int_{S'} \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy, \end{aligned}$$

l'intégrale curviligne est prise positivement sur le contour total de S' et peut s'écrire

$$+ \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \int_c f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha dc.$$

Dans ces deux intégrales, α désigne l'angle de la normale intérieure à S' avec l'axe des x , et chaque courbe doit être décrite, en ayant à gauche l'aire enveloppée par la courbe.

(1) RIEMANN-HATTENDORF, *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*.

Si maintenant on fait décroître le rayon du cercle c , les intégrales doubles relatives à S' tendent vers les intégrales relatives à S , parce que les mêmes intégrales, étendues au cercle c , sont infiniment petites.

L'intégrale relative à s ne change pas, et celle qui est relative à c tend vers 0. On a donc, en toute rigueur,

$$\int \int_s f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy = + \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \int \int_s \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy$$

et enfin

$$(4) \quad 2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial a} = - \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds \\ - \int \int_s \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy + \int \int_s f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy.$$

On aura de même

$$(5) \quad 2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial b} = - \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \sin \alpha ds \\ - \int \int_s \frac{\partial f}{\partial y} \log \frac{1}{r} dx dy + \int \int_s f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial b} dx dy.$$

On voit bien maintenant que φ admet des dérivées partielles du second ordre, car les trois intégrales admettent des dérivées du premier ordre, et il est clair que, si $f(x, y)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre n , φ admettra des dérivées jusqu'à l'ordre $n + 1$.

Nous pouvons, au moyen de ces expressions, former $\Delta \varphi$. Il vient

$$(6) \quad 2\pi \Delta \varphi = + \int_s f(x, y) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds \\ + \int \int_s \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy + \int \int_s f(x, y) \Delta \omega dx dy.$$

[Nous avons mis le signe (+) devant les deux premières intégrales, parce que nous avons remplacé sous le signe $\int$ les dérivées en a et b par des dérivées en x et y .]

La troisième intégrale est nulle, parce que $\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} = 0$.

Mais cette expression va se simplifier bien davantage.

Reprenons l'aire S' dans laquelle les fonctions f et $\log \frac{1}{r}$ sont continues, ainsi que leurs dérivées premières. On aura, d'après une formule de Green,

$$\begin{aligned} & \int \int_{S'} f(x, y) \Delta \log \frac{1}{r} dx dy \\ &= - \int_{s+c} f(x, y) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds - \int \int_{S'} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

D'ailleurs, $\Delta \log \frac{1}{r} = 0$ dans S' . On a donc

$$0 = \int_s f \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds + \int_c f \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} dc + \int \int_{S'} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy.$$

Si maintenant nous faisons décroître indéfiniment le rayon de c , la première de ces intégrales ne change pas, la seconde tend vers une limite qui est évidemment $-2\pi f(a, b)$, et la troisième tend vers $\int \int_s$. On a donc

$$(7) \quad \int_s f(x, y) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds + \int \int_s \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy = 2\pi f(a, b).$$

Ajoutant membre à membre les équations (6) et (7), il vient

$$\Delta v = f(a, b);$$

v est donc bien solution de l'équation proposée.

6. Il nous reste enfin à faire voir que, quand x, y tend vers un point du contour, v tend vers 0.

Remarquons à cet effet que, si nous appelons D la plus grande corde du contour et $\frac{1}{2}M$ la plus grande des deux quantités $\frac{1}{e}$ et $D \left| \log \frac{1}{D} \right|$, on aura toujours

$$0 < rG < M.$$

En effet, le produit $r \log \frac{1}{r}$, quand r varie de 0 à 1, part de 0 pour revenir à 0 en passant par un maximum égal à $\frac{1}{e}$. Si D est > 1 et que r continue à

varier de 1 à D , le produit devient négatif, et son module croît de 0 à

$$D \left| \log \frac{1}{D} \right|.$$

Or la fonction G est, comme on sait, toujours positive. Si l'on pose

$$G = \log \frac{1}{r} - \omega,$$

on aura toujours

$$\omega < \log \frac{1}{r}.$$

De plus, la plus grande valeur négative de ω sur le contour est certainement inférieure en valeur absolue à $\left| \log \frac{1}{D} \right|$, d'après la définition de ω .

On a donc certainement et toujours

$$- \left| \log \frac{1}{D} \right| < \omega < \log \frac{1}{r},$$

$$-r \left| \log \frac{1}{D} \right| < r\omega < r \log \frac{1}{r}$$

et *a fortiori*

$$-D \left| \log \frac{1}{D} \right| < r\omega < r \log \frac{1}{r}.$$

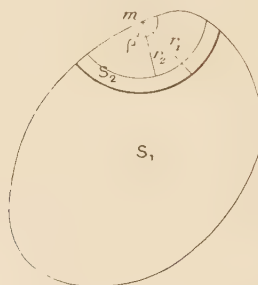
Donc, enfin,

$$-\frac{M}{2} < r\omega < \frac{M}{2},$$

$$rG < M.$$

Cela posé, soit m (*fig. 9*) un point du contour. De ce point comme centre,

Fig. 9.



avec des rayons r_1 et r_2 ($r_1 > r_2$), décrivons des arcs de cercle qui vont découper dans S une bande annulaire d'épaisseur $r_1 - r_2$. Plaçons le point a, b

à l'intérieur de r_2 et partageons l'intégrale en deux parties, l'une relative à l'extérieur S_1 de r_1 , l'autre à son intérieur S_2 .

Nous avons vu au n° 2 qu'on peut décrire de m comme centre un cercle de rayon ρ assez petit, pour que, a, b étant à l'intérieur de ce cercle et x, y dans S_1 , on ait toujours $G < \varepsilon$.

Si donc F désigne le module maximum de $f(x, y)$ dans S , et si A désigne l'aire totale S , l'intégrale relative à S_1 aura un module inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} FA\varepsilon.$$

Quant à l'intégrale relative à S_2 , son module reste inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} FM 2\pi 2r_1 = 2FM r_1.$$

On a donc, tant que a, b reste dans le cercle ρ ,

$$|\varphi| < \frac{1}{2\pi} FA\varepsilon + 2FM r_1.$$

A, F et M sont des quantités fixes, ε et r_1 sont arbitraires et peuvent être choisis aussi petits que nous voulons. Le théorème est donc démontré.

7. Nous avons démontré plus haut que la fonction φ admet des dérivées des deux premiers ordres continues dans S . Il est intéressant de savoir si ces dérivées tendent vers des valeurs finies et déterminées quand le point mobile se rapproche d'un point du contour. C'est là un fait que nous avons admis implicitement au n° 3, au moins pour les dérivées du premier ordre. Bien qu'une démonstration rigoureuse de ce point ne soit pas nécessaire pour l'objet que nous avons en vue, puisque nous avons vérifié après coup que la fonction φ répond bien à la question, il peut être intéressant d'être fixé à ce sujet.

Nous ne procéderons pas directement, à cause des difficultés que présente l'emploi de la fonction G et de ses dérivées lorsque le pôle et l'argument tendent simultanément vers un point du contour, et nous traiterons d'abord le problème suivant :

Que devient la fonction φ si l'on suppose que $f(x, y)$, satisfaisant encore, en général, aux conditions du problème précédent, admette un

segment AB de l'axe des x comme ligne singulière, sur les deux bords de laquelle la fonction f et ses dérivées premières prennent des valeurs différentes, mais finies et déterminées.

On voit tout d'abord que les raisonnements des n^{os} 4 et 6 subsistent entièrement. La fonction v définie par la formule (3) est encore continue dans S , y admet des dérivées premières continues et tend vers 0 sur le contour. Mais le n^o 5 doit être modifié.

Reprenons la formule

$$-2\pi \frac{\partial v}{\partial a} = \iint f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy.$$

L'axe des x partage S en deux parties, S_1 et S_2 . Supposons, par exemple, a, b dans S_1 . On aura

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial v}{\partial a} &= \iint_{S_1} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy \\ &\quad + \iint_{S_2} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy. \end{aligned}$$

On peut appliquer à la première de ces intégrales la transformation du n^o 5 et le même résultat sera atteint pour la seconde au moyen d'une simple intégration par parties. On aura donc

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial v}{\partial a} &= \int_{s_1} f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \int_{s_2} f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds_2 \\ &\quad + \iint_{s_1} \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy + \iint_{s_2} \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy. \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que, dans les intégrales simples, ds est toujours pris positivement, et α est l'angle fait avec l'axe des x par la normale *intérieure* à l'aire considérée.

Si l'on remarque que s_1 et s_2 ont en commun le segment AB, il vient

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial v}{\partial a} &= \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds \\ &\quad + \int_{AB} (f_1 - f_2) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \iint_{S_1} + \iint_{S_2} - \iint_S. \end{aligned}$$

Dans la seconde de ces intégrales, f_1 et f_2 sont les valeurs que prend

$f(x, y)$ en deux points infiniment voisins du point $(x, 0)$, mais situés, le premier dans S_1 et le second dans S_2 . α est relatif à la normale intérieure à S_1 .

On a, de même,

$$-2\pi \frac{\partial v}{\partial b} = \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \sin \alpha \, ds + \int_{AB} (f_1 - f_2) \log \frac{1}{r} \sin \alpha \, ds + \int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial y} \log \frac{1}{r} \, dx \, dy + \int_{S_2} - \int_s.$$

Toutes ces intégrales, sauf peut-être celles qui sont relatives à AB, admettent des dérivées continues quand le point a, b tend vers un point de AB.

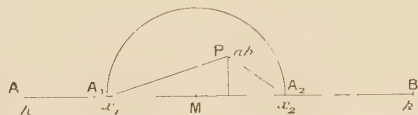
L'intégrale $\int_{AB}$ qui figure dans $\frac{\partial v}{\partial a}$ est identiquement nulle, puisque $\cos \alpha = 0$ sur AB. Il en résulte déjà que $\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b}$ existent et sont continues, même quand a, b traverse AB.

Reste seulement à examiner l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} \text{H} &= \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{\partial}{\partial b} \log \frac{1}{r} \sin \alpha \, ds = - \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{b \, ds}{r^2}, \\ r^2 &= (x - a)^2 + b^2, \quad ds = dx, \\ \text{H} &= - \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2}. \end{aligned}$$

Soit M (fig. 10) le point de AB vers lequel tend a, b . Décrivons de ce

Fig. 10.



point comme centre un demi-cercle A_1, A_2 dans lequel a, b va rester en tendant vers M,

$$\begin{aligned} \text{H} &= - \int_h^{x_1} (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2} \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2} - \int_x^k (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2}. \end{aligned}$$

La première et la troisième intégrale tendent évidemment vers des limites finies quand a, b tend vers M , le cercle restant fixe.

Quant à la seconde, elle tend aussi vers une limite, puisque l'on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{b dx}{b^2 + (x - a)^2} = \text{arc tang} \frac{x_2 - a}{b} - \text{arc tang} \frac{x_1 - a}{b} = \text{arc } A_1 P A_2$$

dont la limite est π .

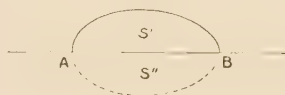
Ainsi $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}$ tend vers une limite finie et déterminée quand a, b tend vers un point M de a, b . Mais cette limite est différente suivant que a, b tend vers M par S_1 ou par S_2 .

Si l'on voulait étudier $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$ en partant de $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$, le même raisonnement ne serait pas immédiatement applicable, parce que l'on aurait à considérer une intégrale qui n'est pas *absolument* convergente. On surmonterait cette petite difficulté en se rappelant que $f_1 - f_2$ admet par hypothèse des dérivées premières. Mais ce calcul est inutile, puisque nous avons déjà constaté la continuité de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$.

En résumé, les dérivées du premier ordre sont continues dans toute l'étendue de S . Il en est de même de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$, mais $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}$ éprouve un saut brusque en traversant la ligne singulière.

Cela posé, revenons à la question qui fait l'objet de ce paragraphe, et supposons d'abord qu'une portion AB (*fig. 11*) de l'axe des x fasse partie

Fig. 11.



du contour s . Joignons A et B par un trait continu ne se coupant pas et détachant de S une aire S' simplement connexe et tout entière au-dessus de l'axe des x . Appelons S'' l'aire symétrique de S' par rapport à AB .

Nous pouvons toujours former une fonction θ harmonique dans S' et prenant sur le contour de S' les mêmes valeurs que φ . La différence $\omega = \varphi - \theta$ joue alors pour S' le même rôle que φ pour S . Définissons main-

tenant dans S'' une fonction que nous appellerons encore $f(x, y)$ et qui prendra en chaque point de S'' une valeur égale et de signe contraire à celle que prenait $f(x, y)$ au point symétrique dans S' . Nous avons ainsi une fonction $f(x, y)$ définie dans l'aire $\Sigma = S' + S''$ et admettant la droite AB pour ligne singulière.

Il existe donc une fonction W , continue ainsi que ses dérivées premières dans toute l'étendue de Σ , admettant dans S' et dans S'' des dérivées secondes continues ⁽¹⁾, et satisfaisant dans chacune de ces régions à l'équation $\Delta W = f(x, y)$. De plus, W s'annule sur le contour de Σ et est donnée par la formule

$$W = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(x, y) G(x, y; a, b) dx dy.$$

Mais il est clair que W s'annule en tous les points a, b de l'axe des x , car, alors, en deux points symétriques, G prend la même valeur et f change seulement de signe, de sorte que les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux.

W s'annule donc sur le contour de S' et coïncide, par suite, avec ϖ dans l'aire S' . Or les dérivées des deux premiers ordres de W sont continues dans toute l'étendue de S' et sur AB. Il en est donc de même pour ϖ ; et comme la fonction harmonique θ jouit de la même propriété, la chose se trouve ainsi démontrée pour φ .

Ce résultat s'étend immédiatement au cas où le segment rectiligne AB est remplacé par un arc régulier AB de ligne analytique. Formons, comme précédemment, une aire simplement connexe S' détachée de S par une ligne analytique intérieure allant de A à B, et déterminons la fonction θ relative à cette aire. La différence $\varpi = \varphi - \theta$ joue le rôle de φ par rapport à S' .

Effectuons alors la représentation de S' sur un demi-cercle dont le diamètre correspondra à l'arc AB du contour primitif. Comme S' est limitée par des lignes analytiques, la fonction de transformation et ses dérivées resteront continues et déterminées, même au delà de ce contour. D'ailleurs, par cette transformation, l'équation

$$\Delta \varpi = f(x, y)$$

⁽¹⁾ Et tendant vers des valeurs déterminées, mais distinctes, quand le point mobile tend vers l'axe des x en restant dans S_1 ou dans S_2 .

va devenir

$$\Delta w' = F(x', y'),$$

$F(x', y')$ étant le produit de ce que devient $f(x, y)$ par un facteur indépendant de w et dépendant seulement de la fonction de transformation. Or, à l'égard de la fonction w' , définie dans l'aire S'_1 transformée de S' , tout ce qui a été dit plus haut est applicable. Ses dérivées restent donc continues jusque sur le contour de S'_1 . Le même résultat subsiste donc dans l'aire S' pour la fonction w , et, par suite, pour la fonction v .

Il est donc établi que les dérivées des deux premiers ordres de v restent continues sur tout arc analytique régulier du contour de S .



CHAPITRE III.

L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE.

1. Nous allons maintenant considérer l'équation générale (1)

$$(1) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial u}{\partial x} + 2E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

dans laquelle les coefficients $A, B, \dots$ désignent des fonctions de x et y qui, dans une région R du plan, sont finies, continues, bien déterminées, et admettent des dérivées partielles également continues des deux premiers ordres.

On peut se proposer à l'égard de cette équation un problème analogue à celui de Dirichlet, et chercher une fonction u admettant, dans une aire S intérieure à R , des dérivées continues des deux premiers ordres, vérifiant l'équation (1) et se réduisant sur le contour s à une fonction arbitrairement donnée d'avance. Nous n'arriverons pas, sans doute, à résoudre ce problème aussi complètement que celui de Dirichlet, mais nous donnerons des conditions suffisantes, sinon nécessaires, pour qu'il existe une telle solution et qu'il n'en existe qu'une.

Nous allons, avant tout, ramener cette équation (1) à une forme plus simple qui facilitera cette recherche.

Substituons d'abord aux variables x et y de nouvelles variables X et Y au moyen des formules

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

dont le déterminant ne devra s'annuler en aucun point de S .

L'équation va devenir

$$(2) \quad A' \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2D' \frac{\partial u}{\partial X} + 2E' \frac{\partial u}{\partial Y} + F'u = 0,$$

(1) Voir plus loin pour le cas d'un second membre.

et l'on aura

$$\begin{aligned} A' &= A \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + C \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \\ C' &= A \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + C \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 & F' &= F. \\ B' &= A \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + B \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + C \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} \end{aligned}$$

Or il est facile de voir que, par la même substitution, la forme quadratique

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2$$

se transforme identiquement en

$$A' dY^2 - 2B' dX dY + C' dX^2,$$

à un facteur près, toujours positif, et qui n'est jamais nul ni infini.

Il résulte de là que pour ramener les termes du second ordre dans notre équation à la forme

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

où A' , B' , C' sont choisis arbitrairement, il suffit de chercher la substitution qui donne lieu à l'identité

$$(3) \quad A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 \equiv \rho (A' dY^2 - 2B' dX dY + C' dX^2).$$

Nous sommes donc ramenés au problème des Cartes géographiques, qui exige seulement, comme on sait, l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre, laquelle coïncide ici avec l'équation des caractéristiques de la proposée.

Suivant que ces caractéristiques seront réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que $B^2 - AC$ sera positif ou négatif, nous saurons donc, par une substitution réelle, ramener l'équation à l'un des deux types suivants

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + a \frac{\partial u}{\partial X} + b \frac{\partial u}{\partial Y} + cu = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + a \frac{\partial u}{\partial X} + b \frac{\partial u}{\partial Y} + cu = 0.$$

Dans ces équations, les coefficients sont de même nature que ceux de

l'équation (1). En particulier, c ne diffère de F que par un facteur positif qui n'est ni nul ni infini dans toute l'étendue du domaine R' qui correspond à la partie de l'ancien domaine R où $B^2 - AC$ garde un signe constant.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à l'étude de l'équation (5).

Le domaine R' est maintenant celui où les coefficients a, b, c sont finis et continus avec leurs dérivées des deux premiers ordres; nous n'en sortirons plus désormais, et négligerons par suite de le mentionner, quand nous parlerons de l'équation (5).

2. La première question qui se pose est maintenant la suivante :

Une intégrale est-elle déterminée par ses valeurs le long d'un contour s ?

Commençons par traiter un cas particulier, en supposant que le coefficient c soit négatif et non nul dans S et sur s . Je dis que dans ce cas il ne pourra y avoir deux intégrales u_1 et u_2 prenant sur s les mêmes valeurs. Il faut donc faire voir que, si une intégrale $u = u_1 - u_2$ s'annule sur s , elle est nécessairement nulle dans S . Or nous allons voir qu'elle ne peut prendre dans S aucune valeur positive.

Si la fonction continue u pouvait prendre dans S des valeurs positives, elle aurait une certaine limite supérieure M , positive, qu'elle atteindrait au moins pour un point x_0, y_0 de S . Donnons alors à y la valeur fixe y_0 et faisons varier x de $x_0 - \varepsilon$ à $x_0 + \varepsilon$.

Entre $x_0 - \varepsilon$ et x_0 , la fonction $u(x, y_0)$ est croissante ou constante.

Entre x_0 et $x_0 + \varepsilon$, la même fonction est décroissante ou constante.

Ainsi, dans le premier intervalle, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ est positive ou nulle, dans le second elle est négative ou nulle. Elle est donc nulle au point x_0, y_0 et de plus n'est jamais croissante entre $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est au point x_0, y_0 négative ou nulle.

Mêmes raisonnements pour $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

On a donc au point x_0, y_0

$$u > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0.$$

Le premier membre de (5) serait alors, pour $x = x_0$ et $y = y_0$, la somme de trois quantités dont aucune ne serait positive et dont la troisième au moins ne serait pas nulle, ce qui est impossible.

Il est donc établi qu'aucune intégrale u ne peut avoir dans S un maximum positif, en entendant le mot maximum au sens le plus large, de limite supérieure.

Elle ne peut non plus avoir une limite inférieure négative, comme on le voit en changeant u en $-u$.

Dans tout ceci on n'a pas fait usage des valeurs de u sur s .

Nous avons donc établi les résultats suivants :

Quand dans une aire S le coefficient $c = \frac{F}{A}$ est constamment négatif et non nul, aucune intégrale continue ne peut avoir de maximum positif ni de limite supérieure positive à l'intérieur de S , ni de minimum négatif ou de limite inférieure négative.

Si les valeurs sur le contour sont toutes nulles, l'intégrale sera nulle dans l'intérieur de S .

Si les valeurs sur le contour sont positives ou nulles, la fonction ne deviendra jamais négative et n'aura pas de maximum dans l'aire.

Si les valeurs sur le contour sont négatives ou nulles, la fonction ne sera jamais positive et n'aura pas de minimum.

En tout état de cause, les valeurs positives de la fonction seront inférieures à la plus grande des valeurs positives sur le contour, et les valeurs négatives seront inférieures en valeur absolue à la plus grande valeur négative sur le contour. Ces résultats nous serviront plus tard. Remarquons seulement qu'ils ne sont établis jusqu'à présent que si, dans S , c est négatif et *non nul*.

3. Revenons maintenant au cas général, et posons

$$u = zv,$$

v étant la nouvelle fonction inconnue, et z une fonction que nous laissons arbitraire pour le moment et assujettie seulement à la condition d'admettre des dérivées continues des deux premiers ordres.

L'équation devient alors

$$(6) \quad z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(2 \frac{\partial z}{\partial x} + az \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(2 \frac{\partial z}{\partial y} + bz \right) \frac{\partial u}{\partial y} + v F(z) = 0,$$

en appelant $F(z)$ le résultat de la substitution de z à la place de u dans le premier membre de (5).

A l'intégrale u de (5) correspond maintenant une intégrale v de (6) prenant sur le contour les valeurs $\frac{u}{z}$.

Si alors on suppose que la fonction z ait été choisie de telle sorte que dans la région considérée du plan on ait constamment

$$(7) \quad z > 0, \quad F(z) < 0,$$

les inégalités étant prises au sens précis du mot et excluant l'égalité, alors on retombera sur le cas précédent, et tous les résultats obtenus seront encore applicables au contour S et à la fonction v .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Dans le voisinage de tout point x_0, y_0 , on peut tracer un domaine D assez petit pour que, un contour quelconque s étant tracé dans D , l'intégrale de (5) soit complètement déterminée par ses valeurs sur s .

Il suffit, en effet, de montrer que dans le voisinage de tout point on peut déterminer une fonction z satisfaisant aux conditions (7). Or ceci est toujours possible et de bien des manières. Posons

$$z = \sin m(x - \alpha),$$

m et α étant deux constantes indéterminées et $m > 0$; z sera positif si l'on prend $m(x - \alpha)$ entre 0 et π .

On a, d'ailleurs,

$$F(z) = (c - m^2) \sin m(x - \alpha) + ma \cos m(x - \alpha).$$

Pour que $F(z)$ soit négatif, x restant dans l'intervalle déterminé, il suffira de prendre

$$a \cot m(x - \alpha) < \frac{m^2 - c}{m}.$$

Appelons A le module maximum de a . L'inégalité peut s'écrire

$$\frac{a}{A} \cot m(x - \alpha) < \frac{m^2 - c}{mA}.$$

Prenons alors pour m une quantité supérieure à la plus grande valeur positive de c . Le second membre devient une quantité positive et non nulle

dont j'appelle $\cot m\alpha_0$ la limite inférieure. α_0 est certainement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2m}$ et différent de ces deux limites.

D'ailleurs, on a

$$\left| \frac{a}{\bar{A}} \right| < 1.$$

Donc, si l'on prend $x - \alpha$ entre α_0 et $\frac{\pi}{m} - \alpha_0$, l'inégalité sera certainement vérifiée.

En résumé, si l'on trace une bande parallèle aux y et de largeur égale à $\frac{\pi}{m} - 2\alpha_0$, pour tout contour situé tout entier dans cette bande, il ne pourra y avoir deux intégrales prenant les mêmes valeurs le long du contour.

Il est clair que si nous avons pris

$$z = \sin m(\alpha x + \beta y - \gamma),$$

nous serions arrivé à une bande de direction arbitraire.

Le théorème que nous avons en vue est donc démontré en toute rigueur, mais les limites que nous obtenons ainsi sont certainement beaucoup trop resserrées et purement théoriques. On trouvera dans chaque cas particulier des limites beaucoup plus larges en appliquant plus habilement la même méthode.

Voici un ou deux exemples :

Soit l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + e^b) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4} u \sin(x - y) = 0,$$

a et b désignant des fonctions continues quelconques.

Prenons $z = e^{-\alpha y}$,

$$F(z) = [x^2 - \alpha(1 + e^b) + \frac{1}{4} \sin(x - y)] e^{-\alpha y}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient

$$F(z) = [-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^b + \frac{1}{4} \sin(x - y)] e^{-\alpha y}.$$

Les conditions (7) sont ici remplies, quels que soient x et y .

Donc, pour un contour quelconque, il ne peut y avoir deux intégrales de

l'équation (8) prenant les mêmes valeurs sur le contour. On remarquera que, dans cet exemple, le coefficient c n'a pas un signe constant.

Prenons encore un exemple où c soit positif,

$$(9) \quad \Delta u + k^2 u = 0,$$

k étant une constante, et posons $z = R^2 - (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2$,

$$F(z) = -\frac{4}{k} + k^2 R^2 - k^2 [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2].$$

Si nous prenons $R < \frac{2}{k}$, les conditions (7) sont vérifiées à l'intérieur de tout cercle de rayon R . L'intégrale est donc encore déterminée par ses valeurs sur tout contour dont aucune dimension n'excède $\frac{4}{k}$.

Pour la même équation, l'emploi de la fonction $z = \sin m(\alpha x + \beta y)$ conduirait à une bande de largeur $\frac{\pi}{k}$ et de direction arbitraire.

4. Une dernière application de la méthode nous permettra de démontrer un théorème très général (1) dont nous avons déjà vu un cas particulier.

Pour toute aire S en tous les points de laquelle c n'est jamais positif, l'intégrale est déterminée par ses valeurs le long du contour.

Il suffit ici de prendre

$$z = e^{-\frac{\alpha}{M} e^{Mx}},$$

α et M étant des constantes indéterminées. On a, en effet,

$$F(z) = z(\alpha^2 e^{2Mx} - \alpha M e^{Mx} - \alpha \alpha e^{Mx} + c) = z \{ \alpha e^{2Mx} [\alpha - (a + M) e^{-Mx}] + c \}.$$

Prenons pour M une quantité positive supérieure au module de la plus petite valeur de a . Alors $a + M$ est toujours supérieur à un nombre positif k . D'ailleurs, dans l'aire S considérée, quelle qu'elle soit, pourvu qu'elle soit limitée, on a

$$z > 0, \quad e^{-Mx} > h > 0.$$

Si donc on choisit pour α un nombre compris entre 0 et hk , le premier

(1) Ce théorème est plus général que celui du n° 2, car ici on peut avoir $c \leq 0$, tandis qu'au n° 2 l'égalité était exclue.

terme du binôme qui multiplie z sera négatif et non nul, le second sera négatif ou nul : donc on aura toujours

$$F(z) < 0,$$

et le théorème est démontré.

Les régions du plan où c ne devient jamais positif présentent ainsi un intérêt particulier et feront plus loin l'objet d'une étude spéciale.

5. Nous n'avons démontré jusqu'ici que des propriétés pour ainsi dire négatives, car nous avons montré que, dans certains cas que nous précisons, il ne peut y avoir deux intégrales prenant des valeurs données sur un contour. Il faut maintenant prouver l'existence de cette unique intégrale (1).

Commençons par le cas d'un contour assez petit pour que le théorème du n° 3 lui soit applicable. Nous supposons aussi d'abord que ce contour est circulaire.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Nous procéderons par approximations successives.

Partons d'une première fonction $u_1 = 0$ que nous substituerons dans le second membre de (10) et intégrons l'équation

$$\Delta u = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 = f(u_1) = 0.$$

Soit u_2 l'intégrale de cette équation prenant sur le contour les valeurs données.

Passons ensuite à l'équation

$$\Delta v_3 = f(u_2),$$

que nous intégrerons en supposant que v_3 s'annule sur le contour ; puis l'on passera à

$$\Delta v_4 = f(v_3),$$

que l'on intégrera dans les mêmes conditions que la précédente.

(1) Cf. PICARD, *Journal de Mathématiques*; 1890.

On formera ainsi une suite de fonctions

$$u_2, \quad v_3, \quad v_4, \quad \dots,$$

qui, dans le contour, seront continues et admettront des dérivées continues des deux premiers ordres. La première de ces fonctions prend sur le contour les valeurs données, les autres s'annulent sur le contour.

Si donc nous démontrons que la série

$$(11) \quad u_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

est uniformément convergente et représente une fonction admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, nous aurons bien la solution cherchée. En effet, cette fonction prendra sur le contour les valeurs données, à cause de la convergence uniforme de la série (11). Ce sera, d'ailleurs, une intégrale de l'équation (10). Pour le voir bien nettement, posons

$$u_n = u_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

On aura évidemment

$$(12) \quad \Delta u_n = a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}.$$

Or, par hypothèse, les séries

$$u_2 + \sum v_p, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sum \frac{\partial v_p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$$

sont convergentes, et même absolument et uniformément convergentes, comme on le verra, et ont pour sommes

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le premier membre de (12) tend donc vers Δu , le second membre tend vers $a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu$, et, par suite, u est bien solution de (10).

Il suffit donc de démontrer la convergence uniforme de toutes ces séries. Cette démonstration n'est pas immédiate. Pour y arriver, nous n'emploierons pas les expressions des u et des v que nous avons trouvées au Chapitre II sous forme d'intégrales doubles, et qui nous conduiraient à des discussions pénibles. Nous aurons recours au développement de ces fonctions en séries

trigonométriques. Mais nous commencerons par deux lemmes qui nous seront utiles.

6. LEMME. — *Si une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles est continue dans un cercle et y admet des dérivées continues des deux premiers ordres, cette fonction est développable dans ce cercle en série*

$$(13) \quad f(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta),$$

absolument et uniformément convergente.

Les a_m et b_m sont des fonctions continues de r satisfaisant aux relations

$$|a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2},$$

h est ici une constante ne dépendant que de la fonction et non du rayon du cercle. On a posé d'ailleurs $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Soit, en effet,

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \varphi(r, \theta).$$

Posons

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma) \cos m\gamma \, d\gamma, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma) \sin m\gamma \, d\gamma.$$

Une double intégration par partie donnera

$$a_m = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{m^2} \int_0^{2\pi} \varphi''_{\gamma}(r, \gamma) \cos m\gamma \, d\gamma, \quad b_m = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{m^2} \int_0^{2\pi} \varphi''_{\gamma}(r, \gamma) \sin m\gamma \, d\gamma.$$

On aura donc

$$|a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2}, \quad h = \max |\varphi''(r, \gamma)|.$$

Il résulte déjà de là que la série (13) est absolument et uniformément convergente. Pour en trouver la somme, considérons la série suivante en ρ et θ , où r entre dans les coefficients à titre de paramètre,

$$(14) \quad \Phi(\rho, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta).$$

On sait que cette série n'est autre chose que le développement de l'inté-

grale de Poisson

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\gamma - \theta) + \rho^2} d\gamma.$$

Quand ρ tend vers l'unité, $\Phi(\rho, \theta)$ tend vers la somme de la série (13), puisque celle-ci est convergente. D'autre part, dans les mêmes conditions, l'intégrale tend vers $\varphi(r, \gamma)$. On a donc bien

$$\varphi(r, \gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta).$$

Le second lemme sur lequel nous nous appuierons concerne certaines séries numériques; nous l'énoncerons comme il suit :

LEMME. — *Les sommes des trois séries convergentes*

$$(15) \quad \sum_{q=1}^{q=m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2},$$

$$(16) \quad \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2},$$

$$(17) \quad \sum_{q=m+1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2}$$

sont inférieures à $\frac{1}{3} \frac{\theta}{m^2}$, θ étant une quantité purement numérique.

Occupons-nous d'abord de la première, dont le nombre des termes est limité. Un raisonnement géométrique bien connu nous permet d'écrire

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} < \frac{2}{(m-1)^2} + \int_1^{m-1} \frac{dx}{x^2(m-x)^2},$$

en envisageant l'aire de la courbe $y = \frac{1}{x^2(m-x)^2}$.

L'intégrale qui figure au second membre se calcule aisément et a pour valeur

$$\frac{1}{m^2} \left[\frac{4}{m-1} \mathbf{L}(m-1) - \frac{2}{m-1} + 2 \right].$$

La quantité entre crochets est visiblement inférieure à une certaine quan-

tité purement numérique, quel que soit m . Il en est de même de la quantité $\frac{m}{m-1}$. On peut donc bien écrire

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} < \frac{1}{3} \frac{\theta}{m^2}.$$

Pour la seconde somme, on procédera de même.

On écrira d'abord

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2} < \frac{1}{(m+1)^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(m+x)^2}$$

et l'on arrivera à la même conclusion.

Enfin la troisième somme se ramène à la deuxième en posant $q = m + q'$. On a donc finalement

$$(18) \quad \sum_1^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2} < \frac{\theta}{m^2}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

7. Considérons alors l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

où nous supposons que $f(x, y)$ est développable en série trigonométrique avec des coefficients a_m et b_m dont les modules sont inférieurs à $\frac{h}{m^2}$. Il suffira pour cela que $f(x, y)$ admette des dérivées secondes limitées dans le cercle, mais cette condition n'est pas indispensable, et ne se trouvera même pas réalisée, en général, dans les applications que nous rencontrerons. La seule chose essentielle est la limitation des a_m et b_m en $\frac{h}{m^2}$.

Nous savons déjà qu'il existe une intégrale de cette équation, continue et s'annulant sur le cercle R. Mais nous allons rechercher directement une telle intégrale sous forme trigonométrique (1).

(1) Cf. PICARD, *Journal de l'École Polytechnique*, LX^e Cahier. Dans ce Mémoire, il s'agit d'équations à coefficients analytiques.

Écrite en coordonnées polaires, l'équation va devenir

$$(19) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \varphi(r, \theta),$$

et l'on a par hypothèse

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \quad |a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2}.$$

Essayons de vérifier l'équation (19) par une série de la forme

$$(20) \quad u = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta).$$

En substituant ce développement supposé convergent dans (19) et identifiant les coefficients de $\cos m\theta$ et de $\sin m\theta$, on trouve que α_m satisfait à la relation

$$(21) \quad \frac{d^2 \alpha_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \alpha_m = a_m.$$

On a d'ailleurs une équation analogue pour β_m .

La fonction u doit être continue dans le cercle, et s'annuler pour $r = R$. Il faut donc qu'il en soit de même pour les α_m ⁽¹⁾. Un calcul élémentaire donne alors, pour l'intégrale α_m de l'équation (21) qui reste finie pour $r = 0$ et qui s'annule pour $r = R$, la valeur suivante

$$2m\alpha_m = r^m \int_R^r \frac{a_m dr}{r^{m-1}} - \frac{1}{r^m} \int_0^r a_m r^{m+1} dr + \frac{r^m}{R^{2m}} \int_0^R a_m r^{m+1} dr.$$

Cette expression est, comme les α_m et β_m , une fonction continue de r dans le cercle et sur le cercle.

α_m admet une limite supérieure M égale à $\frac{h}{m^2}$. On a donc

$$2m|\alpha_m| < \frac{2MR^2}{m-2} + \frac{2MR^2}{m+2},$$

(1) Théorème de Cantor.

d'où

$$|\alpha_m| < \frac{\lambda_1 h R^2}{m^4},$$

λ_1 désignant une constante purement numérique.

Il résulte déjà de là que la série (20) est convergente et admet des dérivées des deux premiers ordres par rapport à θ , continues elles-mêmes.

Mais nous avons besoin aussi des dérivées en r .

On a d'abord

$${}_2 \frac{d\alpha_m}{dr} = r^{m-1} \int_R \frac{a_m dr}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m+1}} \int_0^r a_m r^{m+1} dr + \frac{r^{m-1}}{R^{2m}} \int_0^R a_m r^{m+1} dr;$$

cette expression reste continue pour $r = 0$. Elle donne d'ailleurs

$${}_2 \left| \frac{d\alpha_m}{dr} \right| < \frac{{}_2 MR}{m-2} + \frac{{}_2 MR}{m+2},$$

$$\left| \frac{d\alpha_m}{dr} \right| < \frac{\lambda_2 h R}{m^3}, \quad \lambda_2 = \text{constante numérique.}$$

Passons aux dérivées secondes

$$\begin{aligned} {}_2 \frac{d^2 \alpha_m}{dr^2} = (m-1) r^{m-2} \int_R \frac{a_m dr}{r^{m-1}} - (m+1) \frac{1}{r^{m+2}} \int_0^r a_m r^{m+1} dr \\ + {}_2 a_m + (m-1) \frac{r^{m-2}}{R^{2m}} \int_0^R a_m r^{m+1} dr. \end{aligned}$$

Ici encore tous les termes restent finis pour $r = 0$ et l'on a

$$\left| \frac{d^2 \alpha_m}{dr^2} \right| < \frac{\lambda_3 h}{m^2}.$$

De ces calculs résultent les résultats suivants :

Tout d'abord la série (20) et toutes celles qu'on en déduit par une ou deux dérivations sont absolument et uniformément convergentes. La série (20) représente donc bien l'intégrale que nous cherchions. De plus, dans le développement trigonométrique de cette intégrale u et de ses dérivées, on a les limites suivantes pour les modules des coefficients de $\cos m\theta$

et de $\sin m\theta$,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } u \dots\dots\dots \frac{\lambda h R^2}{m^4} \\ \text{Dans } \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta} \dots\dots\dots \frac{\lambda h R}{m^3} \\ \text{Dans } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots \frac{\lambda h}{m^2} \end{array} \right.$$

λ étant purement numérique.

On en déduit sans peine les limites correspondantes pour $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Il s'agit de développer en série trigonométrique l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}.$$

On a tout d'abord

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta = \cos \theta \left[\frac{1}{2} \frac{d\alpha_0}{dr} + \sum_1^\infty \left(\frac{d\alpha_n}{dr} \cos n\theta + \frac{d\beta_n}{dr} \sin n\theta \right) \right].$$

Or la formule

$$2 \cos p\theta \cos q\theta = \cos(p+q)\theta + \cos(p-q)\theta$$

et ses analogues montrent que l'on obtiendra dans (23) un terme en $\cos m\theta$ seulement par les termes $\frac{d\alpha_{m-1}}{dr}$ et $\frac{d\alpha_{m+1}}{dr}$. Le coefficient de $\cos m\theta$, dans le développement de $\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta$, aura donc une limite de la forme

$$\frac{\lambda_0 \lambda h R}{m^3},$$

λ_0 étant purement numérique.

Le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta$ conduit à la même conclusion.

Les coefficients de $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$, dans $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, ont donc pour limite

$$(24) \quad \frac{\lambda_0 \lambda h R}{m^3}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour montrer que la méthode des approximations successives conduit bien au résultat.

8. Reprenons la suite d'équations

$$\Delta u_2 = 0, \quad \Delta v_3 = a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + c u_2, \quad \Delta v_4 = a \frac{\partial v_3}{\partial x} + b \frac{\partial v_3}{\partial y} + c v_3, \quad \dots$$

Nous avons supposé que les a, b, c admettent des dérivées secondes continues. Dans le développement de ces fonctions, les coefficients de $\cos m\theta$ et de $\sin m\theta$ sont donc plus petits que $\frac{k}{m^2}$ d'après un des lemmes.

La fonction harmonique u_2 est analytique et admet donc des dérivées de tous les ordres *dans le cercle*. Nous allons maintenant supposer que la série des valeurs données sur le contour soit une fonction de θ qui admette des dérivées *troisièmes*. (Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais la simple hypothèse des dérivées secondes est insuffisante dans notre mode de démonstration.) Alors, dans le développement de u_2 en série trigonométrique, on aura

$$u_2 = \frac{1}{2} a_0 + \sum \left(\frac{r}{R} \right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \quad |a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^3};$$

les a_m et b_m sont ici des constantes absolues.

Il résulte de là que, dans les fonctions $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}$, les coefficients de $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$ auront pour limite

$$\frac{h}{m^2 R}.$$

Donc, d'après un calcul fait au numéro précédent, les limites analogues seront

$$\frac{\lambda_0 h}{m^2 R}$$

dans $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial y}$.

Étudions alors le développement trigonométrique de

$$a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + c u_2.$$

Prenons isolément le terme $a \frac{\partial u_2}{\partial x}$.

Si nous désignons d'une manière générale par A_p et B_q les coefficients des lignes trigonométriques respectivement dans α et dans $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\alpha \frac{\partial u_2}{\partial x}$ sera la somme de quatre groupes analogues au suivant

$$\sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} A_p B_q \cos p \theta \cos q \theta$$

et de la quantité

$$\frac{1}{2} A_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} B_0 \alpha.$$

Dans cette dernière partie, le coefficient de $\cos m \theta$ est limité en $\frac{h'}{m^2}$. Dans la somme double, on obtiendra un terme en $\cos m \theta$ en prenant pour p et q les combinaisons suivantes

$$p + q = m, \quad p - q = m, \quad q - p = m.$$

Le coefficient de $\cos m \theta$ dans cette somme aura donc pour limite

$$\sum_1^{m-1} |A_{m-q}| |B_q| + \sum_1^{\infty} |A_{m+q}| |B_q| + \sum_{m+1}^{\infty} |A_{q-m}| |B_q|,$$

et de plus nous savons que

$$|A_p| < \frac{k}{p^2}, \quad |B_p| < \frac{h_1}{p^2} \quad \left(h_1 = \frac{\lambda_0 h}{R} \right).$$

Ce coefficient aura donc pour limite

$$\frac{\lambda_0 h k}{R} \left[\sum_1^{m-1} \frac{1}{(m-q)^2 q^2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{q^2 (m+q)^2} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{q^2 (q-m)^2} \right] < \frac{\lambda_0 h k \theta}{m^2 R},$$

d'après le second lemme.

Telle sera donc évidemment la forme de la limite pour l'expression

$$a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + c u_2.$$

Nous nous trouvons donc dans les conditions du n° 7 et nous pouvons par

suite affirmer que les coefficients de $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$ ont pour limites

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Dans } v_3 \dots\dots\dots & \frac{h\mu R}{m^4} \\ \text{Dans } \frac{\partial v_3}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} \dots\dots\dots & \frac{\lambda_0 h\mu}{m^3} \\ \text{Dans } \frac{\partial v_3}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \dots\dots\dots & \frac{h\mu}{m^3} \\ \text{Dans } \frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 v_3}{\partial r \partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 v_3}{\partial \theta^2} \dots\dots & \frac{h\mu}{m^2 R} \end{array} \right.$$

formules obtenues en remplaçant purement et simplement, dans (22) et (24), la quantité h par $\frac{\lambda_0 h k \theta}{R}$, et posant, pour abrégier, $\lambda_0 \lambda k \theta = \mu$. μ est une constante numérique.

Mais v_4 se déduit de v_3 comme v_3 se déduit de u_2 . Les limites relatives à v_4 se déduiront donc des précédentes en y changeant h en $h\mu R$, c'est-à-dire en multipliant simplement ces limites par μR . Donc enfin les limites relatives à v_n seront

$$\frac{h\mu R}{m^4} (\mu R)^{n-3}, \quad \frac{\lambda_0 h\mu}{m^3} (\mu R)^{n-3}, \quad \frac{h\mu}{m^3} (\mu R)^{n-3}, \quad \frac{h\mu}{m^2 R} (\mu R)^{n-3}.$$

Il en résulte que la série $\Sigma \omega_n$, dans laquelle ω_n désigne v_n ou l'une quelconque de ses dérivées en r et θ des deux premiers ordres, se présentera sous la forme d'une série double absolument et uniformément convergente, car les différents coefficients de $\cos m\theta$, par exemple, dans $\Sigma \omega_n$ sont respectivement inférieurs aux termes de la progression géométrique

$$\frac{H}{m^\alpha} \sum_1^\infty (\mu R)^n$$

qui est convergente si $\mu R < 1$. H est une constante indépendante de m , et α est l'un des nombres 2, 3 ou 4.

La série totale converge donc comme $\sum \frac{1}{m^\alpha}$.

D'ailleurs la condition $\mu R < 1$ sera toujours vérifiée si le rayon du cercle est assez petit, puisque μ est une constante absolue.

La série $u_2 + v_3 + v_4 + \dots$ représente donc bien une fonction continue admettant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. C'est ce que nous voulions démontrer.

9. Avant d'aller plus loin, quelques remarques trouveront ici leur place.

On peut tout d'abord étendre tous les résultats précédents à l'équation complète

$$(26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f,$$

contenant un terme indépendant de u .

En effet, l'intégrale de cette équation qui prend des valeurs données le long d'un contour sera nécessairement unique toutes les fois qu'il en sera de même en supposant $f = 0$. Car, s'il existait deux telles intégrales, leur différence s'annulerait le long du contour et vérifierait l'équation homogène

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Cette différence serait donc identiquement nulle d'après l'hypothèse.

De plus, la méthode des approximations s'applique à l'équation (26) de la manière suivante.

Partons de $u_1 = 0$ et déterminons u_2 par l'équation

$$\Delta u_2 = f$$

avec les valeurs données au contour.

Puis déterminons l'intégrale v_3 de l'équation

$$\Delta v_3 = a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$$

qui s'annule sur le contour, et de même $v_4, v_5, \dots$

Tous les raisonnements déjà faits vont s'appliquer à la série des fonctions $u_2, v_3, v_4, \dots$. Car u_2 admet des dérivées troisièmes (Chapitre II, n° 5), puisque f admet par hypothèse des dérivées secondes comme a, b, c , et ses coefficients sont donc limités en $\frac{1}{m^3}$ comme dans le numéro précédent. La série

$$u_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

et ses dérivées des deux premiers ordres sont donc encore absolument et uniformément convergentes. C'est d'ailleurs une intégrale de (26), car, en posant encore

$$u_n = u_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_n,$$

il vient de nouveau

$$\Delta u_n = a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} + f.$$

Il n'y a donc rien à changer aux raisonnements déjà faits.

Les résultats obtenus peuvent encore être étendus dans une autre direction.

Le changement de variables qui correspond à une représentation conforme transforme l'équation proposée en une autre de même espèce, et la nature des coefficients ne sera pas changée si la fonction de transformation a le caractère d'une fonction entière dans toute la région que l'on veut considérer. On saura donc résoudre le problème pour un contour formé d'un seul arc analytique régulier, si ce contour est suffisamment petit, car on sait représenter l'aire en question sur le cercle d'une manière conforme, au moyen d'une fonction qui a le caractère d'une fonction entière dans toute l'aire et sur le contour. Mais on ne pourrait plus le faire si l'aire était limitée par plusieurs arcs de lignes analytiques différentes, car, dans le voisinage des sommets d'un tel polygone, la fonction de transformation perdrait le caractère de fonction entière, et les coefficients de l'équation transformée ne satisferaient plus aux conditions de continuité qui leur étaient imposées dans la démonstration.

Remarquons enfin que la solution, dans le cas d'une aire assez petite, se présente toujours sous la forme d'une somme de deux termes, le premier étant la fonction harmonique qui prend sur le contour les valeurs données, le second étant une fonction continue dans l'aire et tendant vers 0 sur le contour.

10. Nous allons maintenant revenir, pour ne plus la quitter, à l'équation homogène. Nous avons vu que dans la région T, où c est négatif ou nul, il existe au plus une intégrale continue dans une aire S et prenant sur s des valeurs données. Il s'agit de démontrer l'existence de cette intégrale unique. C'est ce que nous ferons en faisant voir que le procédé alterné de M. Schwarz s'applique à notre équation.

Nous pouvons évidemment supposer c *négatif et non nul*, puisque nous avons vu (n° 4) que le cas où c peut s'annuler se ramène aisément au cas où c ne peut pas s'annuler, au moyen d'un changement de fonction

$$u = ve^{-\frac{c}{M}x}.$$

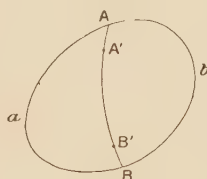
Or, en supposant c négatif et non nul, nous avons établi au n° 2 le résultat suivant qui est fondamental.

A l'intérieur de l'aire S , les valeurs positives de l'intégrale sont toutes *inférieures* à la plus grande valeur positive sur le contour, et les valeurs négatives ont toutes un module inférieur au plus grand module des valeurs négatives sur le contour.

Ceci suffit à faire voir que le procédé alterné est applicable.

Soit, en effet, un contour pour lequel on sache résoudre le problème. Traçons une ligne AB (*fig. 12*) qui ne soit pas tangente au contour et qui

Fig. 12.



le divise en deux parties a et b . Construisons la fonction u qui vérifie l'équation en prenant sur a la valeur 0 et sur b la valeur 1. On sera assuré que, en tout point de AB , u a une valeur positive inférieure à un nombre $q < 1$. C'est le lemme fondamental de Schwarz qui s'étend à notre équation.

En effet, séparons de AB deux petits arcs AA' et BB' .

Sur $A'B'$, u est une fonction continue qui, nous le savons, reste inférieure à l'unité, puisque l'arc $A'B'$ est tout entier intérieur à S . Elle a donc une limite supérieure q_1 qu'elle atteint effectivement et qui est inférieure à 1. Maintenant l'aire S que nous envisageons sera toujours formée, dans les applications que nous ferons de ce lemme, par la superposition d'un certain nombre d'aires élémentaires assez petites pour que, à l'intérieur de chacune de ces aires, la fonction u puisse être mise sous la forme $u_2 + U$, u_2 étant la fonction harmonique prenant sur le contour de l'aire élémentaire les mêmes valeurs que u et U tendant vers 0 sur le contour de l'aire. La portion de s , voisine de A , peut donc être rattachée à une semblable aire élémentaire, et, par suite, A' peut être pris assez voisin de A pour que, sur tout l'arc AA' , la fonction u_2 soit inférieure à un nombre q_2 plus petit que 1, et que U soit aussi petit que nous voudrions. Sur AA' on a donc

$$u < q_2 < 1,$$

et de même sur BB'

$$u < q_3 < 1.$$

Si donc q désigne la plus grande des trois quantités q_1, q_2, q_3 , on aura, sur tout l'arc AB ,

$$u < q < 1.$$

De là résulte que, si une intégrale U prend sur a la valeur 0 et sur b des valeurs dont le module est inférieur ou égal à H , les valeurs de U sur AB auront un module inférieur à qH .

Soit, en effet, u l'intégrale égale à 0 sur a et à 1 sur b , et considérons la fonction

$$U + Hu$$

qui est nulle sur a et positive ou nulle sur b . Elle sera certainement positive ou nulle sur AB . Mais on peut l'écrire sous la forme suivante

$$U + qH + H(u - q).$$

Sur AB on a, d'après le lemme, $u - q < 0$. Il faut donc que l'on ait

$$U + qH > 0.$$

Ainsi sur AB on a $U > -qH$ et la considération de la fonction $U - Hu$ conduirait de même à la conclusion

$$U < qH \quad \text{sur } AB.$$

11. Nous pouvons maintenant montrer que, si l'on sait résoudre le problème pour deux aires empiétant l'une sur l'autre et dont les contours ne sont pas tangents, on saura aussi le résoudre pour l'aire formée par la superposition des deux aires données, en entendant bien par là que la portion commune aux deux aires n'est censée recouvrir le plan qu'une seule fois.

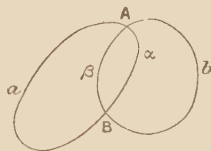
Ainsi, dans la *fig.* 13, les deux aires données sont $A\alpha B\alpha$, $A\beta B\beta$, et l'aire formée par leur superposition est $A\alpha B\beta$.

Appelons S_1 la première aire, S_2 la deuxième, Σ l'aire commune $A\beta B\alpha$. Par hypothèse, on sait résoudre le problème pour S_1 et S_2 avec des valeurs arbitraires sur les contours, et l'on veut résoudre le problème pour l'aire totale en donnant sur son contour une suite continue de valeurs U .

Construisons l'intégrale u , qui prend sur a les valeurs données, et sur α

une suite de valeurs que nous choisirons arbitrairement, mais formant cependant avec les valeurs données sur α une suite continue. Cette intégrale est

Fig. 13.



définie dans l'aire S_1 et prend sur β des valeurs déterminées. Pour plus de netteté, appelons U_1 les valeurs de U sur α et U_2 les valeurs de U sur b . Alors les valeurs de u_1 sur β forment évidemment un prolongement continu de U_2 .

Construisons alors la fonction v_4 qui vérifie l'équation dans S_2 prenant sur b les valeurs U_2 et sur β les mêmes valeurs que u_1 . Cette fonction prendra sur α des valeurs déterminées qui seront un prolongement continu de U_4 .

Formons alors de nouveau l'intégrale u_2 relative à l'aire S_1 qui prend sur α les valeurs U_1 et sur α les mêmes valeurs que v_1 . Cette fonction prendra sur β des valeurs déterminées, etc.

Nous formons ainsi deux suites infinies de fonctions que j'écris dans le Tableau suivant :

$$(27) \quad \begin{array}{ccccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{n-1} & u_n & u_{n+1} & \dots & & & \\ | & \diagdown & | & \diagdown & & | & \diagdown & & & & \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_{n-1} & \varphi_n & \varphi_{n+1} & \dots & \beta & \alpha. \end{array}$$

Les fonctions u_i existent dans l'aire S_1 et y vérifient l'équation proposée. Elles prennent toutes sur a les valeurs U_1 . Les fonctions v_i existent dans S_2 et y vérifient l'équation. Elles prennent toutes sur b les valeurs U_2 .

De plus, d'après la manière dont nous avons opéré, il est clair que dans le Tableau précédent les fonctions jointes par un trait vertical ont la même valeur sur β et celles qui sont jointes par un trait oblique, la même valeur sur α .

Il faut montrer que :

Les fonctions u_i tendent vers une limite u qui vérifie l'équation dans S , et prend sur a les valeurs données;

Les fonctions φ_i tendent vers une limite φ qui vérifie l'équation proposée dans S_2 et prend sur b les valeurs données;

Enfin, que les fonctions u et v coïncident dans la portion commune aux deux aires.

Nous aurons ainsi montré l'existence d'une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres, donnée à la vérité par deux développements analytiques, distincts dans les régions S_1 et S_2 , mais qui coïncident dans la région commune à S_1 et S_2 ; cette fonction vérifie l'équation dans toute l'aire $S_1 + S_2$ et prend les valeurs données sur le contour total. Le problème sera ainsi complètement résolu.

Dans ce but, calculons le module de $u_{n+1} - u_n$.

On a, d'après le Tableau ci-dessus, et en employant une notation qui se comprend d'elle-même,

$$(u_{n+1} - u_n)_\alpha = (v_n - v_{n-1})_\alpha, \quad (u_{n+1} - u_n)_\alpha = 0;$$

mais

$$(v_n - v_{n-1})_\beta = 0, \quad (v_n - v_{n-1})_\beta = (u_n - u_{n-1})_\beta.$$

D'après l'un des lemmes, à chacune des lignes α et β est attaché un nombre q_1 ou q_2 inférieur à l'unité. Appelons q le plus grand de ces deux nombres. On aura donc

$$\begin{aligned} |v_n - v_{n-1}|_\alpha &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ |u_{n+1} - u_n|_\alpha &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta. \end{aligned}$$

Et de là se concluent les deux relations fondamentales

$$(28) \quad \begin{cases} |u_{n+1} - u_n|_M < q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ |u_{n+1} - u_n|_\beta < q^2 \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta. \end{cases}$$

M désignant un point quelconque de la première aire.

Nous avons donc la série suivante d'inégalités

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n|_M &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta &< q^2 \max. |u_{n-1} - u_{n-2}|_\beta, \\ \max. |u_{n-1} - u_{n-2}|_\beta &< q^2 \max. |u_{n-2} - u_{n-3}|_\beta, \\ &\dots\dots\dots, \\ \max. |u_3 - u_2|_\beta &< q^2 \max. |u_2 - u_1|_\beta, \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre,

$$|u_{n+1} - u_n|_M < q^{2n-3} \max. |u_2 - u_1|_\beta.$$

Or q est plus petit que l'unité. La série dont le terme général serait $(u_{n+1} - u_n)_M$ est donc absolument et uniformément convergente. La somme des n premiers termes, qui est $u_n - u_1$, tend donc vers une limite. u_n a donc une limite u , qui représente une fonction continue dans l'aire S_1 . Comme on a constamment $(u_n - u_{n-1})_\alpha = 0$, la fonction u prend sur α les valeurs données. Je dis maintenant que u admet des dérivées continues des deux premiers ordres et vérifie l'équation proposée. Pour le faire voir, construisons la solution continue u' de l'équation qui existe dans S_1 et qui prend sur le contour de S_1 les mêmes valeurs que u . (Ceci est possible, puisque par hypothèse on sait résoudre le problème pour S_1 .) Nous allons montrer que u et u' coïncident.

On peut, en effet, prendre n assez grand pour que u_n diffère aussi peu que l'on veut de sa limite u . A tout nombre ε arbitraire correspond donc un nombre n tel que l'on ait

$$|u - u_n|_M < \varepsilon,$$

quel que soit M dans S_1 et même sur le contour de S_1 .

On a donc en tout point du contour

$$|u' - u_n| < \varepsilon,$$

puisque u et u' coïncident sur le contour.

Mais alors on a en tout point intérieur

$$|u' - u_n|_M < \varepsilon.$$

Puisque u' et u_n sont solutions de l'équation. Il vient donc

$$|u' - u|_M < 2\varepsilon.$$

On a donc rigoureusement $u = u'$ dans toute l'aire S_1 , puisque, en un point M quelconque, u et u' ont des valeurs fixes et que ε est arbitraire.

On démontrera de même que v_n tend vers une limite v qui vérifie l'équation dans l'aire S_2 .

Maintenant u et v coïncident dans Σ . Car la différence $u - v$ est définie dans Σ et y vérifie l'équation. Cette différence est d'ailleurs nulle sur α et sur β , car on a, d'après le Tableau (27),

$$(u_n - v_n)_\beta = 0, \quad (u_{n+1} - v_n)_\alpha = 0;$$

on a donc

$$|u - v|_{\beta} = |(u - u_n) - (v - v_n) + (u_n - v_n)|_{\beta} < |u - u_n|_{\beta} + |v - v_n|_{\beta} + |u_n - v_n|_{\beta},$$

et, par suite,

$$|u - v|_{\beta} < \varepsilon$$

en prenant n assez grand.

On a donc, de nouveau, rigoureusement

$$(u - v)_{\beta} = 0$$

et de même

$$(u - v)_{\alpha} = 0.$$

$u - v$ est donc nulle sur le contour de Σ et y vérifie l'équation.

Σ est d'ailleurs dans la région T où c est négatif. On a donc identiquement

$$u = v \quad \text{dans } \Sigma.$$

On pourra ainsi résoudre le problème pour des aires de plus en plus compliquées et étendues, et qui différeront aussi peu que l'on voudra d'une aire arbitrairement donnée. Pour pouvoir résoudre entièrement le problème relativement à une aire donnée d'avance, il manque encore un intermédiaire, par exemple la solution pour le cas d'un petit secteur ou d'un petit segment circulaire, ou d'un triangle, en un mot d'une aire présentant un angle aigu arbitraire. La méthode de M. Schwarz s'appliquerait alors sans modification. C'est là une question qui appelle encore de nouvelles recherches.

12. Avant de quitter ce sujet, nous ne pouvons nous dispenser de mentionner une importante propriété de l'équation linéaire dans le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques de x et y . Toute intégrale de l'équation est alors elle-même une fonction analytique, dans la région, du moins, où les caractéristiques sont imaginaires (¹). Il suffit, évidemment, de démontrer la chose pour l'équation réduite

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

puisque l'on peut toujours ramener l'équation à cette forme (sous l'hypo-

(¹) PICARD, *Journal de l'École Polytechnique*, LX^e Cahier.

thèse que les caractéristiques sont imaginaires) au moyen d'un changement de variables effectué par des fonctions analytiques.

Pour démontrer ce théorème, il y a peu de chose à ajouter aux développements donnés au n° 7.

Nous disons qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles est analytique et régulière dans une région, lorsque, dans le voisinage d'un point quelconque x_0, y_0 de cette région, la fonction est développable en série procédant suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$ et $y - y_0$, la série restant convergente quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue.

Il résulte de cette définition que si dans ce développement on pose

$$x - x_0 = r \cos \theta, \quad y - y_0 = r \sin \theta,$$

et qu'on exprime les puissances des lignes trigonométriques en fonctions linéaires des sinus et cosinus des arcs multiples, le groupe des termes homogènes en $x - x_0$ et $y - y_0$ de degré ν va devenir une expression de la forme $r^\nu P_\nu$, P_ν étant une somme linéaire de sinus et cosinus des arcs

$$\nu\theta, \quad (\nu - 2)\theta, \quad (\nu - 4)\theta, \quad \dots,$$

et la série restera convergente si dans P_ν on prend chaque terme avec sa valeur absolue ⁽¹⁾. Les coefficients de θ sous les signes *sin* et *cos* dans P_ν sont les entiers positifs inférieurs ou égaux à ν et de même parité que ν . Cela résulte immédiatement des expressions connues de $\cos^\nu \theta$ et $\sin^\nu \theta$ en fonction linéaire trigonométrique, et des formules qui transforment en somme un produit de deux lignes trigonométriques.

La série ainsi obtenue étant absolument convergente par hypothèse, nous pouvons y grouper les termes comme nous le voulons. Si donc nous groupons tous les termes en $\cos \nu \theta$ par exemple, le coefficient de $\cos \nu \theta$ sera une série ordonnée suivant les puissances croissantes de r , commençant par un terme en r^ν , tous les termes ayant, d'ailleurs, la parité de ν ; cette série reste évidemment convergente si l'on y remplace chaque terme par sa valeur absolue.

Réciproquement, si une série trigonométrique absolument convergente

(1) Ce point résulte de l'expression que l'on peut obtenir pour les coefficients de P_ν en calculant P_ν par un développement de Fourier appliqué simplement aux termes homogènes de degré ν .

admet pour coefficients de $\cos \nu \theta$ et de $\sin \nu \theta$ des séries en r présentant ce caractère, la série totale représentera une fonction analytique. Il suffit pour le voir de remonter la chaîne des déductions précédentes.

Reportons-nous alors au n° 7. Les α_m et b_m sont des séries en r comme celles que nous venons de rencontrer. Il en est donc de même pour α_m et β_m d'après les expressions de ces quantités par des intégrales définies.

Si, de là, nous passons au n° 8, nous voyons donc que les différentes quantités $u_2, v_3, v_4, \dots$ sont des fonctions analytiques. Mais, dans le cas actuel, il ne sera plus nécessaire, pour montrer que la série

$$(29) \quad u_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

résout le problème, de supposer que la série des valeurs au contour est une fonction admettant des dérivées troisièmes. Cette hypothèse avait pour but d'obtenir, pour certains coefficients du développement, une limite de la forme $\frac{h}{m^4}$, ce qui nous était indispensable pour démontrer rigoureusement que la série (29) admet des dérivées secondes.

Il va nous suffire de supposer l'existence de dérivées *secondes* seulement pour la fonction donnée sur le contour, et ce point est important pour la suite.

En effet, dans cette hypothèse, on voit immédiatement que, dans toutes les formules du Tableau (25), les exposants de m au dénominateur doivent simplement être diminués d'une unité, les formules restant, d'ailleurs, inaltérées. La série (29) converge donc maintenant comme $\sum \frac{1}{m^3}$ au lieu de converger comme $\sum \frac{1}{m^4}$. Elle est encore absolument et uniformément convergente; seulement maintenant le coefficient de $\cos m \theta$ dans cette série est une série en r obtenue par le groupement de tous les coefficients de $\cos m \theta$ dans ses différents termes. C'est donc une série ordonnée suivant les puissances croissantes et positives de r , commençant par un terme en r^m , ne contenant que des termes de même parité que m , et absolument convergente. La série (29) est donc une fonction analytique de x et de y ; elle admet, par suite, des dérivées de tous les ordres, et, en particulier, du second ordre. Elle représente donc bien l'intégrale cherchée.

Il résulte immédiatement de là que toute intégrale est une fonction analytique. Soit, en effet, une intégrale quelconque u_1 , continue dans le voisi-

nage de x_0, y_0 . Traçons de ce point comme centre un cercle de rayon suffisamment petit. L'intégrale considérée u , prend sur la circonférence de ce cercle des valeurs déterminées formant une fonction U *qui admet des dérivées secondes*, puisque l'intégrale considérée admet des dérivées secondes en x et y dans toute région où elle existe. Si alors nous formons, par la méthode du n° 8, l'intégrale continue v , qui se réduit à U sur la circonférence, cette intégrale v , sera, comme on vient de le voir, une fonction analytique. Mais les intégrales u et v , coïncident nécessairement, si le rayon du cercle est assez petit, puisqu'elles prennent les mêmes valeurs sur la circonférence. L'intégrale u , est donc analytique.

Fait et approuvé :

Paris, le 3 mai 1892.

LE DOYEN,

G. DARBOUX.

Permis d'imprimer :

Paris, le 4 mai 1892.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Les équations générales de la théorie de l'élasticité.

Vu et approuvé :

Paris, le 3 mai 1892.

LE DOYEN,

G. DARBOUX.

Permis d'imprimer :

Paris, le 4 mai 1892.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

23

ALCANTARA, THESY.

PROCESSIONES DOMINIS VIDE LA. 1. 1. 1.

PROCESSIONES DOMINIS VIDE LA. 1. 1. 1.

PROCESSIONES DOMINIS VIDE LA. 1. 1. 1.

PROCESSIONES DOMINIS VIDE LA. 1. 1. 1.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

18511

Quai des Grands-Augustins, 55.
